

Учебное занятие (для кружка по математике)«Фракталы.

Классификация фракталов. Построение множества Аполлона».

Данный урок предназначен для математического кружка. Кружок посещают студенты, имеющие математические способности, а также те, кто принимает участие в олимпиадах по математике и информатике. Этим учащимся я не разделяю на отдельные группы. Обучение происходит вместе, и студенты одновременно изучают и дополнительные главы по математике, и темы по информатике, которые не входят в общеобразовательный курс.

Тип урока: Интегрированный урок математика и информатика.

Тема: «Фракталы. Классификация фракталов. Построение множества Аполлона».

Цели урока:

образовательные: Познакомить учащихся с миром удивительных линий – фрактальными кривыми, рассказать об истории создания и о применении фракталов в нынешнем мире.

воспитательные: содействовать в ходе урока формированию внимательности

развивающие: развитие логического мышления, формулировки выводов.

Время и место проведения: 90 мин.(2 ак. час), кабинет информатики.

Оборудование:

- Мультимедийный проектор, экран.
- Компьютеры. Программы: Microsoft Power Point,Pascal
- Локальная сеть.
- Меловая доска.
- Раздаточные материалы

Содержание дидактического модуля:

План урока:

1. Организационный момент (1мин.);
2. Разминка(5 мин.)
3. Формулировка темы и целей урока(2 мин.)
- 4.Изложение нового материала(15 мин.)
- 5.Построение множества Аполлона .Уточнение темы урока(практическая часть, индивидуальная работа).(65мин.)
6. Домашнее задание.(2 мин.)

Формы работы на уроке:

1. Коллективная.
2. Индивидуальная.

Ход урока:

1. Организационный момент.

- Всем здравствуйте. Сегодня наше с вами занятие мы посвятим окружающему нас миру. «Какое отношение имеет математика к окружающему миру?», - спросите вы. На этот вопрос мы с вами ответим в ходе урока. Для начала немного разомнемся.

2. Разминка (устно).

- Скажите, пожалуйста ,из каких геометрических фигур состоит следующий объект ?
(картинки демонстрируются в виде презентации в Microsoft Power Point)

Картинка №1



(треугольник, прямоугольник, квадрат, параллелепипед, пирамида)

Картинка №2



(прямоугольник, параллелепипед, цилиндр)

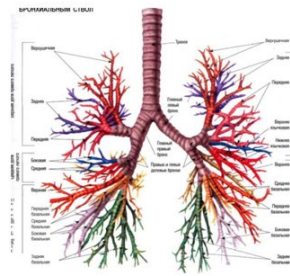
Картинка №3



(цилиндр, круг)

- Посмотрите, на следующий слайд, что на нем изображено?

Картинки №4-7



(дерево, бронхи, снежинки, ракушки)

- Кто сможет перечислить, из каких геометрических фигур они состоят?
(нет изученных фигур)

Комментарий учителя:

- Оказывается, вокруг нас масса объектов, которые невозможно описать с помощью “Евклидовой геометрии”. Этот вопрос оставался нерешенным вплоть до 80х годов 20века. В 1975 году Бенуа Мальдебротом было введено понятие «Фрактала». В 1977 году была выпущена книга Fractal geometry of Nature(фрактальная геометрия природы). Так что такое фрактал?

3. Формулировка темы и целей урока.

- Анализируя вопросы ,на которые мы пока не смогли дать ответы, сформулируйте тему урока.

Тема нашего урока «Фракталы. Классификация фракталов».

- Кто сможет сформулировать какова цель нашего урока?

(Студены формулируют цель самостоятельно. **Цель урока:** познакомиться с понятием Фрактала. Научиться описывать объекты, которые невозможно описать уже изученными элементами “Евклидовой геометрии”.).

4. Изложение нового материала.

- Зачастую гениальные открытия, совершенные в науке, способны кардинально изменять нашу жизнь. Так, например, изобретение вакцины может спасти множество людей, а создание нового вооружения приводит к убийству. Буквально вчера (в масштабе истории) человек «укротил» электричество, а сегодня уже не может представить свою жизнь без него. Однако существуют и такие открытия, которые, что называется, остаются в тени, причем, несмотря на то, что они также оказывают то или иное влияние на нашу жизнь. Одним из таких открытий стал фрактал. Большинство людей даже не слышали о таком понятии и не смогут объяснить его значение .

Каждому человеку присуща природная любознательность, благодаря которой он и познает окружающий мир. Зачастую в своем стремлении познания он старается оперировать логикой в суждениях. Так, анализируя процессы, которые происходят вокруг, он пытается вычислить взаимосвязи и вывести определенные закономерности. Самые большие умы планеты заняты решением этих задач. Грубо говоря, наши ученые ищут закономерности там, где их нет, да и быть не должно. И тем не менее даже в хаосе есть связь между теми или иными событиями. Вот этой связью и выступает фрактал. В качестве примера рассмотрим сломанную ветку, валяющуюся на дороге. Если внимательно к ней присмотреться, то мы увидим, что она со всеми своими ответвлениями и сучками сама похожа на дерево. Вот эта схожесть отдельной части с единым целым свидетельствует о так называемом принципе рекурсивного самоподобия. Фракталы в природе можно найти сплошь и рядом, ведь многие неорганические и органические формы формируются аналогично. Это и облака, и морские раковины, и раковины улиток, и кроны деревьев, и даже кровеносная система. Данный список можно продолжать до бесконечности. Все эти случайные формы с легкостью описывает фрактальный алгоритм. Вот мы подошли к тому, чтобы рассмотреть, что такое фрактал с позиции

точных наук.

Фрактáл (лат. fractus — дроблёный, сломанный, разбитый) — это сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре в целом. В более широком смысле под фракталами понимают множества точек в Евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, отличную от топологической.

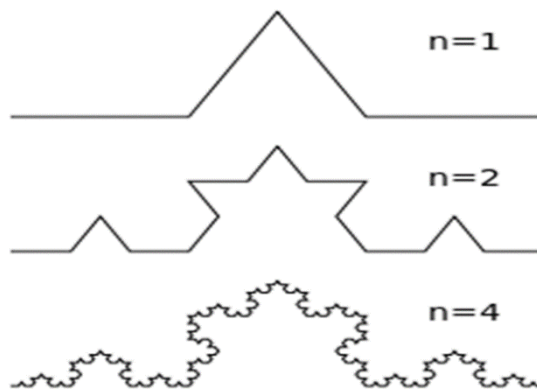
Сегодня под понятием фрактала подразумевают графическое изображение некой структуры, которая при увеличенном масштабе будет подобна сама себе. Однако математическая база для создания этой теории была заложена еще до рождения самого Мандельброта, а вот развиваться она не могла, пока не появились электронные вычислительные машины.

На рубеже 19-20 веков изучение природы фракталов носило эпизодический характер. Это объясняется тем, что математики предпочитали изучать объекты, поддающиеся исследованию, на основе общих теорий и методов. В 1872 году немецким математиком К. Вейерштрассом был построен пример непрерывной функции, нигде не дифференцируемой. Однако это построение оказалась целиком абстрактным и трудным для восприятия. Дальше пошел швед Хельге фон Кох, который в 1904 году построил непрерывную кривую, не имеющую нигде касательной. Ее довольно легко нарисовать, и, как оказалось, она характеризуется фрактальными свойствами. Один из вариантов данной кривой назвали в честь ее автора – «снежинка Коха». Далее идею самоподобия фигур развивал будущий наставник Б. Мандельброта француз Поль Леви. В 1938 году он опубликовал статью «Плоские и пространственные кривые и поверхности, состоящие из частей, подобных целому». В ней он описал новый вид – С-кривую Леви.

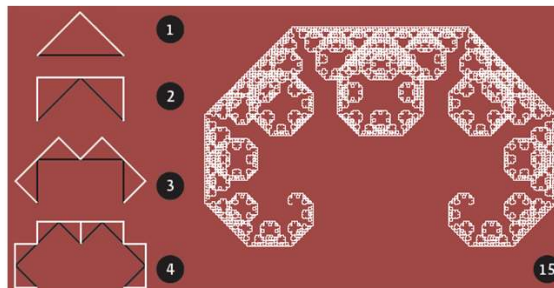
Все вышеперечисленные фигуры условно относятся к такому виду, как
1) **геометрические фракталы.**

(показ примеров фракталов будет производиться с помощью презентации в Microsoft Power Point)

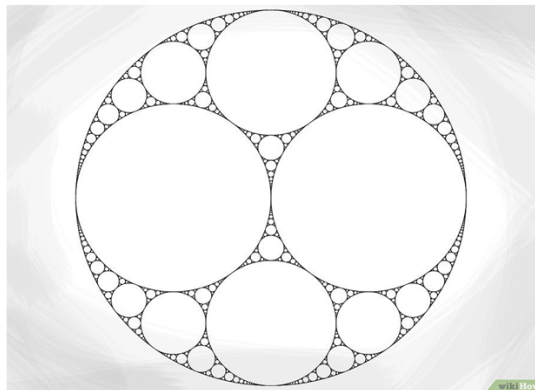
Кривая Коха



С-кривая Леви



Множество Аполлона- «целующиеся круги»



2) АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ. Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: фазовый портрет, установившийся процесс, аттрактор и т.д. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или как говорят - аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно

получить **сложные фрактальные картины** с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.



3.) СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ. Ещё одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются **объекты очень похожие на природные** – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря .

[Существуют и другие классификации фракталов](#), например деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные(стохастические).

- Найти примеры алгебраических и стохастических фракталов будет задано вам на дом. На следующем занятии мы прослушаем выступления всех желающих.

5. Построение множества Аполлона (практическая часть, индивидуальная работа).

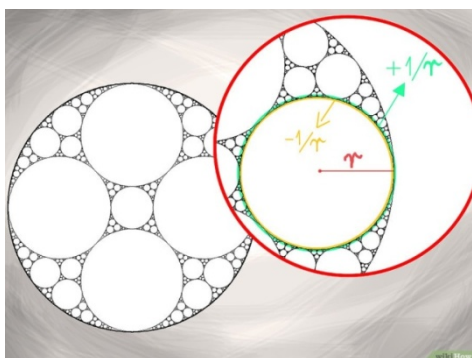
- Сегодня мы уделим чуть больше внимания геометрическим фракталам. Построим множество Аполлона. Поэтому тему урока немного дополним : «Фрактал. Классификация фракталов. Построение множества Аполлона.»
- Сначала мы будем строить фрактал в тетрадах, применяя формулы для расчета длины радиуса окружностей. Затем попробуем реализовать алгоритм построения данного фрактала в среде программирования Pascal.

(алгоритм построения и расчетов будет выдан на карточках. С помощью образца, студенты смогут построить свой вариант множества Аполлона. Т.е. они произвольно выбирают центр первой окружности и ее радиус.)

Образец карточки:

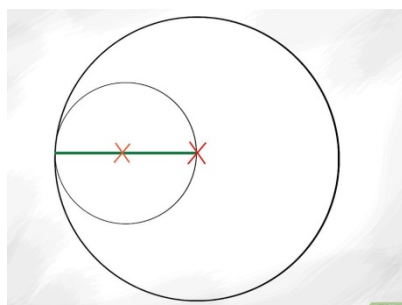
Построение множества Аполлона

Множество Аполлона – это вид фрактала, который строится посредством постоянно уменьшающихся в диаметре окружностей в одной большой окружности. Каждая окружность в множестве Аполлона является «касательной» к смежным окружностям, другими словами круги в множестве Аполлона соприкасаются только в бесконечно малой точке. Он назван в честь греческого математика Аполлония Пергского. Этот тип фрактала умеренной степени сложности можно построить на компьютере или вручную, при этом создается красивое и яркое изображение.

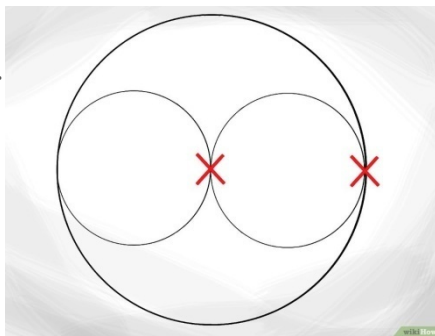


1. **Определите ключевые термины.** В инструкции ниже используются следующие термины:
 - Множество Аполлона: одно из нескольких названий вида фрактала, который состоит из группы окружностей, расположенных в большой окружности и касающихся всех смежных. Он также называется «Круги Содди» или «Целующиеся круги».
 - Радиус окружности: расстояние от центра окружности до точки, лежащей на окружности. Обычно обозначается переменной «r».

- Кривизна окружности: положительная или отрицательная обратная радиусу величина, или $\pm 1/r$. Кривизна является положительной для внешней стороны окружности, и отрицательной – для внутренней.
 - Касательная: термин применяется к линиям, плоскостям и фигурам, которые пересекаются в одной бесконечно малой точке. В множестве Аполлона это ссылается на тот факт, что каждая окружность касается соседней только в одной точке. Обратите внимание, что пересечение отсутствует – касательные фигуры не перекрываются.
2. **Разберитесь в теореме Декарта.** Теорема Декарта – это формула, которая используется при подсчете размеров окружностей в множестве Аполлона. Если мы определим кривизну ($1/r$) любых трех окружностей, как a , b , и c соответственно, а теорема гласит, что кривизна окружности (или окружностей), которая является касательной ко всем трем окружностям, обозначенную d , равняется: $d = a + b + c \pm 2(\sqrt{a \times b + b \times c + c \times a})$.
- Для наших целей мы будем использовать только ответ, который мы получили, поставив знак плюс перед квадратным корнем (другими словами, $\dots + 2(\sqrt{\dots})$). В настоящее время, достаточно знать, что способ вычитания в уравнении используется в других связанных с ним задачах.
3. Начните с одной большой окружности. Ваша первая задача – просто нарисовать одну большую, идеально ровную окружность. Чем больше круг, тем сложнее может быть ваш фрактал, поэтому старайтесь построить такую окружность, какую позволяет размер бумаги, или так, чтобы можно было ее полностью видеть на экране в графической программе.



4. Нарисуйте окружность поменьше в первой окружности, которая будет касаться ее в одной точке. Итак, начертите окружность внутри нашей первой окружности, она будет меньше, чем основная, но все равно достаточно большая. Точный размер второй окружности зависит от вас, так как нет установленного размера. Однако, давайте начертим вторую окружность так, чтобы она занимала половину основного круга. Другими словами, ее центр – это середина радиуса большей окружности.
- Помните, что в множестве Аполлона все окружности являются касательными друг к другу. Если вы пользуетесь циркулем при построении окружностей, воссоздайте этот эффект, поставив острый конец циркуля посередине радиуса основной окружности, и отрегулировав карандаш циркуля таким образом, чтобы он просто касался края окружности, и затем нарисуйте меньшую внутреннюю окружность.



Примените теорему Декарта, чтобы вычислить размеры следующих окружностей. На мгновение перестанем рисовать. Теперь, когда у нас есть три окружности во фрактале, мы можем использовать теорему Декарта, чтобы найти радиус следующей окружности, которую будем рисовать. Помните уравнение теоремы Декарта $d = a + b + c \pm 2(\sqrt{a \times b + b \times c + c \times a})$, где a , b , и c являются кривизной трех касательных окружностей и d – кривизна окружности касательной ко всем трем. Поэтому, чтобы найти радиус нашего следующего круга, давайте рассчитаем кривизну каждой имеющейся у нас

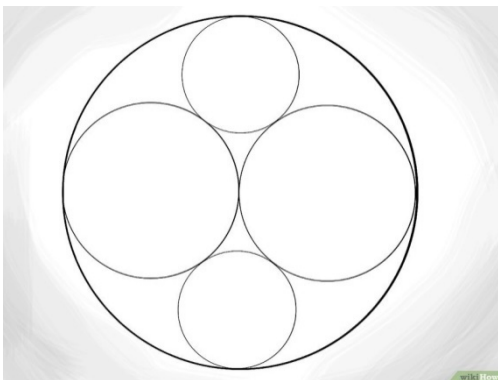
окружности, пока не сможем найти кривизну следующей окружности и затем рассчитаем ее радиус.

- Давайте определим радиус внешней окружности как **1**. Так как другие окружности находятся внутри нее, мы имеем дело с «внутренней» кривизной (вместо внешней), и, следовательно, мы знаем, что она отрицательна. $-1/r = -1/1 = -1$. Так кривизна большой окружности равна **-1**.
- Радиус меньших окружностей составляет половину радиуса большой, то есть $1/2$. Так как эти окружности соприкасаются друг с другом и основной окружностью внешними сторонами, мы имеем дело с внешней кривизной, положительной. $1/(1/2) = 2$. Поэтому кривизна меньших окружностей равна **2**.
- Теперь мы знаем, что $a = -1$, $b = 2$, и $c = 2$ в нашем уравнении теоремы Декарта.

Давайте вычислим d :

- $d = a + b + c \pm 2 (\sqrt{a \times b + b \times c + c \times a})$
- $d = -1 + 2 + 2 \pm 2 (\sqrt{-1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times -1})$
- $d = -1 + 2 + 2 \pm 2 (\sqrt{-2 + 4 + -2})$
- $d = -1 + 2 + 2 \pm 0$
- $d = -1 + 2 + 2$
- $d = 3$. Кривизна следующей окружности **3**. Так как $3 = 1/r$, радиус

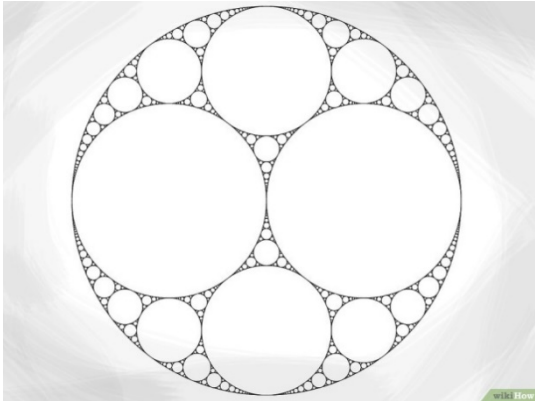
этой окружности будет равняется **1/3**.



5. Начертите следующую пару окружностей. Чтобы нарисовать следующие две окружности, используйте значения радиуса, которые вы только что нашли. Не забывайте, что эти окружности являются касательными к тем, чья кривизна была использована при подсчете теоремы Декарта. Другими словами, они будут касаться и основной и

вторичных окружностей. Чтобы эти круги касались трех других, вам нужно начертить их в свободной области сверху и снизу в основном круге.

- Помните, что радиус этих окружностей равен $1/3$. Отмерьте $1/3$ от края внешней окружности и затем начертите новую. Она должна быть касательной ко всем трем близлежащим окружностям.



6. Таким образом продолжайте добавлять окружности. Так как они являются фракталами, множество Аполлона бесконечно сложное. Это означает, что вы можете добавлять окружности все меньшего и меньшего размера к основе фрактала. Вы ограничены только точностью ваших инструментов (или, если вы используете компьютер, способностью графической программы к увеличению). Каждая окружность, какой бы маленькой она не была, должна быть касательной к трем другим. Чтобы нарисовать каждую последующую окружность, используйте значения кривизны трех касательных к ней окружностей для теоремы Декарта. Затем с помощью ответа точно начертите новую окружность.

- Обратите внимание, что множество, которое мы выбрали для построения, симметрично, поэтому радиус одной окружности такой же, как радиус идентичной ей окружности. Однако, не все множества Аполлона симметричны.
- Давайте разберем еще один пример. Допустим, после построения последней пары окружностей, мы захотим начертить окружности, касательные к нашей

третьей паре и основной окружности. Кривизна этих окружностей равняется 3, 2 и -1 соответственно. Теперь включаем эти числа в теорему Декарта, установив, что $a = -1$, $b = 2$, и $c = 3$:

- $d = a + b + c \pm 2 (\sqrt{a \times b + b \times c + c \times a})$
- $d = -1 + 2 + 3 \pm 2 (\sqrt{-1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times -1})$
- $d = -1 + 2 + 3 \pm 2 (\sqrt{-2 + 6 + -3})$
- $d = -1 + 2 + 3 \pm 2 (\sqrt{1})$
- $d = 2, 6$. У нас два ответа! Однако, мы знаем, что наша новая

окружность будет меньше, чем касательные к ней, значит иметь смысл будет только значение кривизны **6** (а радиус **1/6**).

- Другой ответ, 2, на самом деле относится к гипотетической окружности на «другой стороне» точки касательной ко второй и третьей окружности. Эта окружность является касательной к обеим этим окружностям и к основной, но она будет пересекать те окружности, которые мы уже нарисовали, поэтому можно проигнорировать этот ответ.

➤ Ребята, кто смог справиться самостоятельно с данным заданием?

(студент поднимают руки)

➤ Вы большие молодцы. К тем, кому нужна помощь, подойду индивидуально .

(когда задание выполняют все, студентам предлагается попробовать описать этот алгоритм в среде программирования Pascal)

```
uses CRT, GraphABC;
```

```
var
```

```
  x, y, a, b: Real;
```

```
  r: Real;
```

```
  a0, b0: Real;
```

```
  a1, b1, a2, b2: Real;
```

```
  flx, fly: Real;
```

x1, y1: **Real**;

begin

setwindowcaption('Фракталы: Аполлониово Множество');

setwindowsize(650, 500);

clearwindow;

x := 0.2;

y := 0.3;

a := 0;

b := 0;

Randomize;

r := Sqrt(3);

while not KeyPressed **do**

begin

a := Random;

a0 := $3 \cdot (1+r-x) / (\text{sqr}(1+r-x) + \text{sqr}(y)) - (1+r)/(2+r)$;

b0 := $3 \cdot y / (\text{sqr}(1+r-x) + \text{sqr}(y))$;

if (a <= 1/3) **and** (a >= 0) **then**

begin

x1 := a0;

y1 := b0;

end;

a1 := -1/2;

b1 := r/2;

a2 := -1/2;

b2 := -r/2;

flx := $a0 / (\text{sqr}(a0) + \text{sqr}(b0))$;

fly := $-b0 / (\text{sqr}(a0) + \text{sqr}(b0))$;

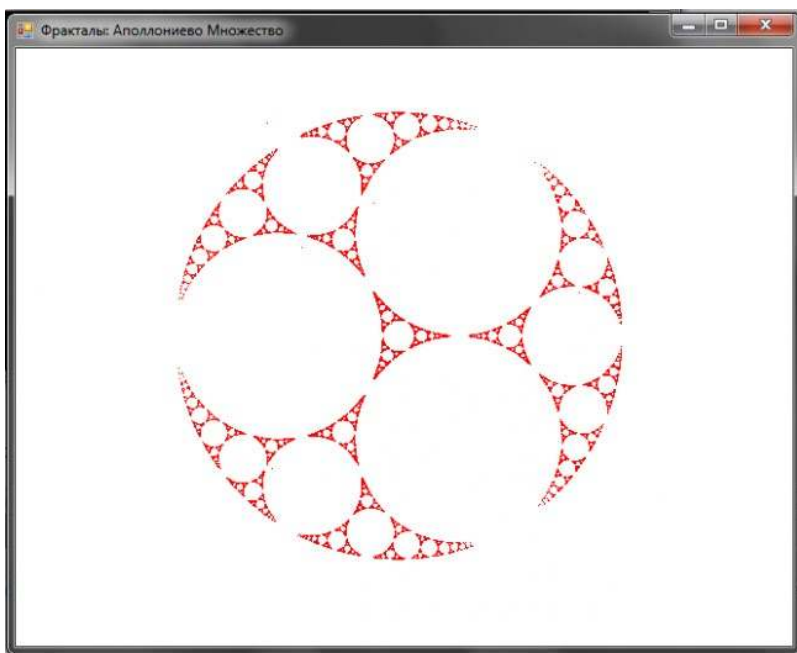
if (a <= 2/3) **and** (a > 1/3) **then**

begin

```

    x1 := flx*a1-fly*b1;
    y1 := flx*b1+fly*a1;
end;
if (a <= 3/3) and (a > 2/3) then
begin
    x1 := flx*a2-fly*b2;
    y1 := flx*b2+fly*a2;
end;
x := x1;
y := y1;
PutPixel(320+Round(x*50), 240+Round(y*50), clRed);
end;
ReadKey
end.

```



(данную программу написать совсем не сложно, если понимать принцип построения множества. На этом примере студенты могут как раз увидеть ,что принцип построения фракталов сводится к бесконечному количеству итераций, тем самым обратить внимание на свойства самих фракталов)

6. Домашнее задание.

Найти примеры алгебраических и стохастических фракталов.
Сформулировать их особенности. Сформулировать свойства фракталов.