

**МОБУ «Сясьстройская средняя общеобразовательная школа №1»**

**Всероссийский конкурс «Педагогический опыт»**

Методическая разработка к курсу внеурочной  
деятельности «Олимпиадная математика» по  
теме:

## **«Уравнения в целых числах»**

Выполнила:

Панина Анна Сергеевна,

учитель математики

I квалификационной категории

МОБУ «Сясьстройская СОШ №1»

г.Сясьстрой, 2020 г.

## Введение

Работа посвящена решению уравнений в целых числах. Актуальность темы обусловлена тем, что задачи, основанные на решении уравнений в целых числах, присутствуют в качестве заданий практически на каждой олимпиаде школьников по математике в старших классах. В школьной программе эта тема рассматривается в ознакомительном порядке. Существует много способов их решения, которые не входят в школьную программу по математике, однако их полезно знать участникам олимпиад. В работе представлены основные способы решения уравнений в целых числах, разобраны конкретные примеры. Данная работа будет полезна учителям математики для подготовки к олимпиадам учащихся старших классов.

### 1. Линейные диофантовы уравнения

Любое уравнение, которое требуется решить в целых числах, называют диофантовым уравнением. Простейшим является линейное уравнение вида  $ax+by=c$ , где  $a, b, c$  – целые числа. Пара чисел  $(x,y)$  является решением данного уравнения. При решении линейного диофантового уравнения используется следующая теорема.

**Теорема.** Линейное диофантовое уравнение вида  $ax+by=c$ , где  $a, b, c$  – целые числа, имеет решение тогда и только тогда, когда  $c$  делится на  $\text{НОД}(a,b)$ .

Если  $\text{НОД}(a,b)=1$  или  $c$  делится на  $\text{НОД}(a,b)$  и  $(x_0,y_0)$  – некоторое решение уравнения  $ax+by=c$ , то все решения задаются формулами  $x=x_0+b_1t$ ,  $y=y_0-a_1t$ , где  $t$  – произвольное целое число.

*Замечание.* Как правило, некоторое решение  $(x_0,y_0)$  уравнения  $ax+by=c$  находится методом подбора.

**Задача 1.** Решить уравнение в целых числах  $7x + 15y = 3$ .

*Решение.*

$\text{НОД}(7,15)=1$ . Найдем частное решение данного уравнения. Для этого выразим переменную  $x$  через  $y$ :  $x = \frac{3-15y}{7} = \frac{(7-7y)+(-4-8y)}{7} = 1 - y - \frac{8y+4}{7}$ . Методом подбора подберем решение  $y_0=3$ , тогда  $x_0=-6$ .

*Ответ:  $(-6+15t; 3-7t)$ , где  $t$  – целое число.*

**Задача 2.** Доказать, что уравнение  $42x+66y=13$  не имеет целочисленных решений.

*Решение.*

$\text{НОД}(42,66)=6$ , 13 нацело не делится на 6, поэтому данное уравнение неразрешимо в целых числах.

*Ответ: решений нет.*

**Задача 3.** Найти все целые решения системы уравнений:  
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1, \\ 3x + 2y + 3z = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

Преобразуем уравнения системы, умножив первое уравнение на 3, а второе на 2. Получим: 
$$\begin{cases} 6x + 9y + 12z = 3, \\ 6x + 4y + 6z = 4. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим диофантовое уравнение:  $5y+6z=-1$ .

$\text{НОД}(5,6)=1$ . Выразим переменную  $y$  через переменную  $z$ :  $y = \frac{-1-6z}{5} = \frac{(5-5z)+(-6-z)}{5} = 1 - z - \frac{6+z}{5}$ . Подберем решение  $z_0=-1$ , тогда  $y_0=1$ . Получаем решение данного уравнения:  $y=1+6t$ ,  $z=-1-5t$ , где  $t$  – целое число.

Подставим полученные решение в первое уравнение системы и найдем переменную  $x$ :  $2x=1-3y-4z=1-3(1+6t)-4(-1-5t)=1-3-18t+4+20t=2+2t$ . Отсюда,  $x=1+t$ , где  $t$ - целое число.

*Ответ:  $(1+t, 1+6t, -1-5t)$ , где  $t$  – целое число.*

## **2. Диофантовые уравнения более высоких степеней**

Рассмотрим разные способы решения уравнения в целых числах, степень которых превышает 1.

**Задача 4.** (Петербургские математические олимпиады). Решите уравнение с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  в целых числах:  $10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7$ .

*Решение.*

*Первый способ (разложение на множители).* Запишем уравнение в виде:  $(10x^2 + 5xy) + (6xy + 3y^2) = 7$ , отсюда  $5x(2x+y) + 3y(2x+y) = 7$ ,  $(5x+3y)(2x+y) = 7$ . Т.к.  $x$  и  $y$  – целые числа, то  $5x+3y$  и  $2x+y$  – также целые числа. Поэтому для решения данного уравнения, достаточно рассмотреть все возможные варианты разложения числа 7 на произведение двух целых множителей. Всего получаем 2 случая:  $7=7 \cdot 1 = -7 \cdot (-1)$ .

Составляем и решаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = -1, \\ 2x + y = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = -7, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Решая каждое из данных систем уравнений, получаем следующие пары целых корней:  $(-4; 9)$ ,  $(20; -33)$ ,  $(-20; 33)$ ,  $(4; -9)$ .

*Второй способ (решение уравнения как квадратного относительно одной из неизвестных).*

Запишем данное уравнение в виде:  $10x^2 + (11y)x + (3y^2 - 7) = 0$ . Решим уравнение как квадратное относительно переменной  $x$ :

$D = 121y^2 - 40(3y^2 - 7) = 121y^2 - 120y^2 + 280 = y^2 + 280$ . Если  $D > 0$ , получаем корни уравнения:  $x_{1,2} = \frac{-11y \pm \sqrt{y^2 + 280}}{20}$  (1)

Для существования целых решений, необходимо чтобы дискриминант уравнения был квадратом целого числа, т.е.  $y^2 + 280 = a^2$ , где  $a$  – целое число.

Получаем  $y^2 - a^2 = -280$ , следовательно,  $(y-a)(y+a) = -280$  или  $\begin{cases} y - a = b_1, \\ y + a = b_2, \end{cases}$  где  $b_1$  и  $b_2$  – целые числа, такие, что  $b_1 \cdot b_2 = -280$ . Сложим уравнения системы, получим  $2y = b_1 + b_2$  или  $y = \frac{b_1 + b_2}{2}$ . (2)

Поскольку  $b_1$  и  $b_2$  разного знака, возможны следующие разложения на множители:  $280 = 1 \cdot (-280) = -1 \cdot 280 = 2 \cdot (-140) = -2 \cdot 140 = 4 \cdot (-70) = -4 \cdot 70 = 5 \cdot (-56) = -5 \cdot 56 = 7 \cdot (-40) = -7 \cdot 40 = 8 \cdot (-35) = -8 \cdot 35 = 10 \cdot (-28) = -10 \cdot 28 = 20 \cdot (-14) = -20 \cdot 14 = 40 \cdot (-7) =$

-40·7. Используя условие (2), получаем значения переменной  $y$ : -69, 69, -33, 33, -9, 9, 3, -3. Находим значения переменной  $x$  из формулы (1): 20, -20, 4, -4. Значения переменной  $y$ : -69, 69, 3, -3 не подходит, т.к.  $x$  являются целыми числами.

*Ответ:*  $(-4; 9), (20; -33), (-20; 33), (4; -9)$ .

**Задача 5.** Решить в целых уравнение:  $3xy - 9x^2 = y - 3x + 8$

*Решение.*

*Третий способ (выражение одной неизвестной через другую).* Заметим, что переменная  $y$  входит в уравнение в первой степени. Выразим переменную  $y$  через переменную  $x$ :  $3xy - y = 9x^2 - 3x + 8$ , отсюда

$y(3x-1) = 9x^2 - 3x + 8$ . Получим:  $y = \frac{9x^2 - 3x + 8}{3x-1} = \frac{3x(3x-1) + 8}{3x-1} = 3x + \frac{8}{3x-1}$  при условии, что  $3x - 1 \neq 0$ .

Решение в целых числах возможно только в случае, если число  $3x-1$  является делителем числа 8. Целые делители числа 8: 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8.

Получим уравнения:

- |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1) $3x-1=1;$  | 2) $3x-1=2;$  | 3) $3x-1=4;$  | 4) $3x-1=8;$  |
| 5) $3x-1=-1;$ | 6) $3x-1=-2;$ | 7) $3x-1=-4;$ | 8) $3x-1=-8.$ |

Первое, третье, шестое, восьмое уравнения не имеют решений в целых числах. Из остальных уравнений получаем корни  $x$ : 1, 3, 0, -1. Подставляем значения  $x$  в выражение, содержащее переменную  $y$ , получим соответственно: 7, 10, -8, -5.

*Ответ:*  $(1, 7), (3, 10), (0, -8), (-1, -5)$

**Задача 6.** Доказать, что уравнение  $19x^3 - 17y^3 = 50$  не разрешимо в целых числах.

Решение уравнений данного вида основано на исследовании возможных остатков левой и правой частей уравнения от деления на некоторое фиксированное натуральное число.

*Замечание.* Говоря строго математическим языком, для решения уравнения в данном случае применяется теория сравнений.

*Решение.*

Заметим, что при делении 17 на 9 получается остаток  $8=2^3$ . Найдем остатки от деления левой и правой частей уравнения на число 9:  $19 \equiv 1 \pmod{9}$ ,  $17 \equiv 8 \pmod{9}$ ,  $50 \equiv 5 \pmod{9}$ . Запишем полученное уравнение:  $x^3 - 8y^3 = 5$ , отсюда  $x^3 - (2y)^3 = 5$ . Следовательно,  $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=5$ . Выпишем целые делители числа 5: 1, 5, -1, -5.

Заметим, что для любых целых  $x$  и  $y$  число  $x^2+2xy+4y^2 \geq 0$ , следовательно, оба сомножителя в левой части уравнения должны быть положительными. Тогда уравнение равносильно совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x^2 + 2xy + 4y^2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 5, \\ x^2 + 2xy + 4y^2 = 1. \end{cases}$$

Решая обе системы методом подстановки, учащиеся увидят, что данное уравнение не разрешимо в целых числах.

**Задача 7.** Решить в натуральных числах  $3^x + 4^y = 5^z$ .

*Решение.*

Т.к.  $5^z \equiv 1 \pmod{4}$ , то и  $3^x + 4^y \equiv 1 \pmod{4}$ , отсюда следует, что  $x$  четно. Пусть  $x=2m$ , где  $m$  – натуральное число. Аналогично,  $3^x + 4^y \equiv 1 \pmod{3}$ , а  $5^z$  дает остаток 1 только при четных  $z$ , откуда следует, что  $z=2k$ , где  $k$  – натуральное число. Тогда исходное уравнение можно записать в виде  $3^{2m} + 2^{2y} = 5^{2k}$  или  $5^{2k} - 2^{2y} = 3^{2m}$ . Отсюда следует,  $(5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^{2m}$ . Разность чисел, стоящих в этих скобках, равна  $2 \cdot 2^y$  и не делится на 3. Это возможно только в случае,

когда  $\begin{cases} 5^k - 2^y = 1, \\ 5^k + 2^y = 3^{2m}. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнение первое, получим диофантово уравнение  $3^{2m} - 1 = 2 \cdot 2^y$  или  $3^{2m} - 1 = 2^{y+1}$ . Еще раз разложим уравнение на множители, получим:  $(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^{y+1}$ . Значит, оба сомножителя в левой части являются степенью двойки, отличающимися на 2. Следовательно,  $\begin{cases} 3^m - 1 = 2, \\ 3^m + 1 = 4, \end{cases}$  отсюда следует, что  $m=1$ , а  $2^{y+1}=8$ , т.е.  $y=2$ . Тогда  $x=2$  и  $3^2 + 4^2 = 5^z$ , откуда  $z=2$ . Таким образом, единственным решением данного уравнения являются тройка чисел  $(2, 2, 2)$ .

*Ответ: (2,2,2).*

**Задача 8.** Найти все тройки простых чисел  $(a,b,c)$ , которые удовлетворяют равенству  $a^b + b^a = c$ .

*Решение.*

Заметим, что если тройка удовлетворяет условию задачи, то и для тройки  $(b,a,c)$  данное равенство также выполняется.

Предположим, что числа  $a$  и  $b$  нечетны, тогда число  $c$  – четное. Однако  $c$  простое, значит  $c=2$ . Равенство  $a^b + b^a = 2$  при натуральных  $a$  и  $b$  выполняется лишь при  $a=b=1$ , однако число 1 не является простым.

Итак, хотя бы одно из чисел  $a$  и  $b$  четно (и значит, равно 2). Если  $a=b=2$ , то  $a^b + b^a = 2^2 + 2^2 = 8$  не является простым числом. Пусть  $a=2$ . Заметим, что при  $b=3$ ,  $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$  – простое число, т.е. тройка  $(2, 3, 17)$  удовлетворяет условию задачи.

Пусть  $b > 3$ . Т.к.  $b$  простое нечетное, то  $b \equiv 1 \pmod{6}$  или  $b \equiv 5 \pmod{6}$ , тогда  $b^2 \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $2^b \equiv 2 \pmod{6}$ . Следовательно,  $2^b + b^2 \equiv 3 \pmod{6}$  и поэтому делится на 3. Это может быть только при  $c=3$ . Однако ясно, что никакое  $b > 3$  не удовлетворяет равенству  $2^b + b^2 \equiv 3$ . Таким образом, решением задачи будут служить тройки  $(2,3,17)$  и  $(3,2,17)$ .

*Ответ: (2,3,17) и (3,2,17)*

В завершении рассмотрим задачу, связанную с формулами, а не с уравнениями.

**Задача 9.** Найти все целые  $n$ , при которых дробь  $a = \frac{n^5+3}{n^2+1}$  – целое число.

*Решение.*

Разделим многочлен  $n^5+3$  на многочлен  $n^2+1$ , получим неполное частное  $n^3-n$  и остаток  $n+3$ :  $n^5+3 = (n^3-n)(n^2+1) + (n+3)$ . Отсюда  $a = n^3 - n + \frac{n+3}{n^2+1}$ . Т.к.  $n^3-n$  – целое число, то  $a$  – целое число тогда и только тогда, когда  $\frac{n+3}{n^2+1}$  – целое число.

Поиск значений  $n$ , для которых дробь  $\frac{n+3}{n^2+1}$  – целое число, можно упростить, сведя его к перебору значений  $n$ , являющихся решением совокупности: 
$$\begin{cases} |n+3| \geq n^2+1, \\ n+3=0. \end{cases}$$

Отсюда при  $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  дробь  $a$  является целым числом.

### **Задания для самостоятельной работы учащихся:**

1. Найти все целые решения уравнений:

1)  $6x+9y=2;$

2)  $5x+9y=2;$

3)  $15x+78y=12;$

4)  $13x+9y=-1;$

5)  $7x+17y=5.$

2. Пусть  $A$  – множество целых чисел, имеющих при делении на 5 остаток 3, а  $B$  – множество целых чисел, имеющих при делении на 8 остаток 7. Найти все числа, которые входят одновременно в оба множества.

*Указание. Решить в целых числах уравнение  $5x+3=8y+7$ .*

3. Найти все целые решения систем уравнений:

1)  $\begin{cases} 3x+3y+5z=1, \\ 4x+5y-2z=4; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} 2x+3y+5z=8, \\ 5x-6y+8z=9. \end{cases}$

4. Решить уравнения в целых числах:

1)  $2xy-6x^2=9x-3y+6;$

2)  $x^2-6xy+13y^2=100;$

3)  $2x^2y^2+y^2-6y^2-12=0;$

4)  $2xy+x+y=83.$

1) Доказать, что уравнение  $x^2+y^2=1971$  не имеют решений в целых числах.

*Указание. Рассмотреть остатки суммы квадратов  $x$  и  $y$  при делении на 3.*

5. Найти все целые  $n$ , при которых дробь  $a = \frac{n^4+3n^2+7}{n^2+1}$  является целым числом.

6. Найти все решения в целых числах уравнения  $1+2^k+2^{2k+1}=n^2$ .

## **Заключение**

На протяжении многих веков математики надеялись отыскать общий способ решения диофантовых уравнений. В 1970 году ленинградский математик Ю.В.Матиясевич доказал, что такого способа не существует. Существует множество способов решения уравнений в целых и натуральных числах.

В данной работе рассмотрены основные способы решения диофантовых уравнений первой степени и выше первой степени, разобраны задачи, составлены задания для самостоятельного решения учащимися старших классов на факультативе. Данные задания будут полезны учащимся для подготовки к олимпиадам и к сдаче ЕГЭ по профильной математике.

## **Литература**

1. Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса. – М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008 г. – 384 с.
2. Иванов О.А. Математика 10-11 приятная во всех отношениях. Материалы для факультативных занятий. – СПб: СМИО Пресс, 2014 г.
3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) для 10 класса. – М.: Просвещение, 2014.
4. Латанова Н.И., Власова А.П., Евсеева Н.В. Решение уравнений в целых числах. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 75с.
5. Гринько Е.П., Головач А.Г. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам. – Б: БрГУ им. А.С.Пушкина, 2013 г.
6. Садовничий Ю.В. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение задач и уравнений в целых числах. – М: Изд. «Экзамен», 2019 г.