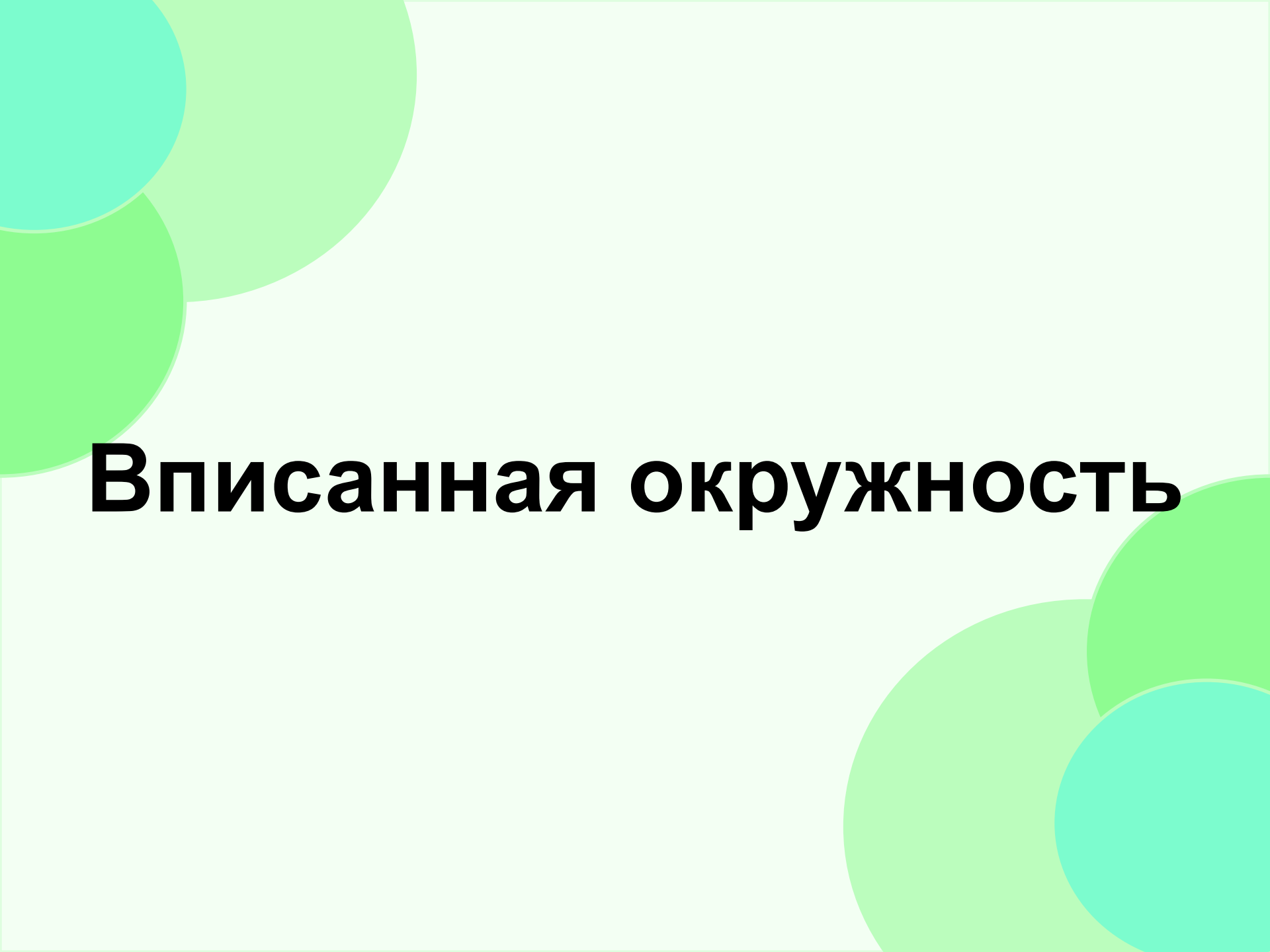
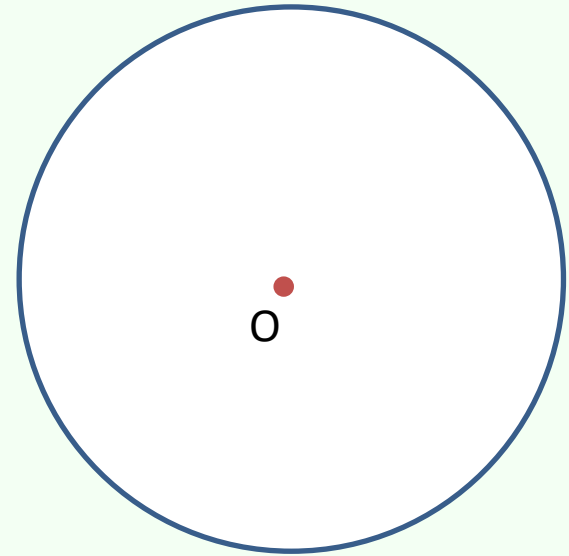




Вписанная окружность

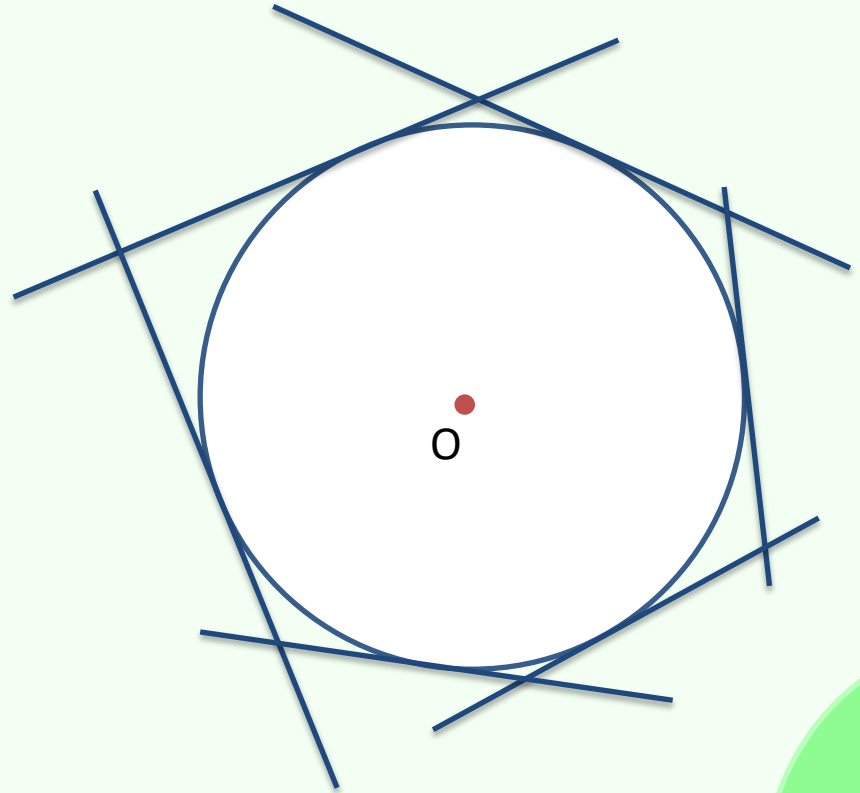
Понятие вписанной окружности

Рассмотрим окружность
с центром в точке O и
некоторым радиусом



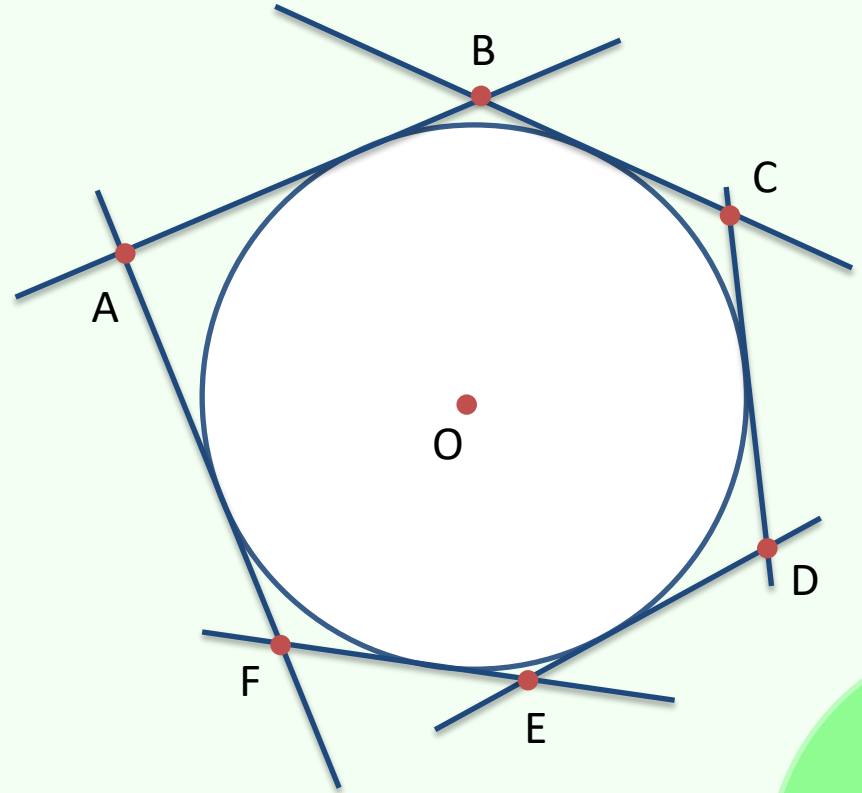
Понятие вписанной окружности

Проведем к этой окружности несколько касательных, которые попарно пересекаются



Понятие вписанной окружности

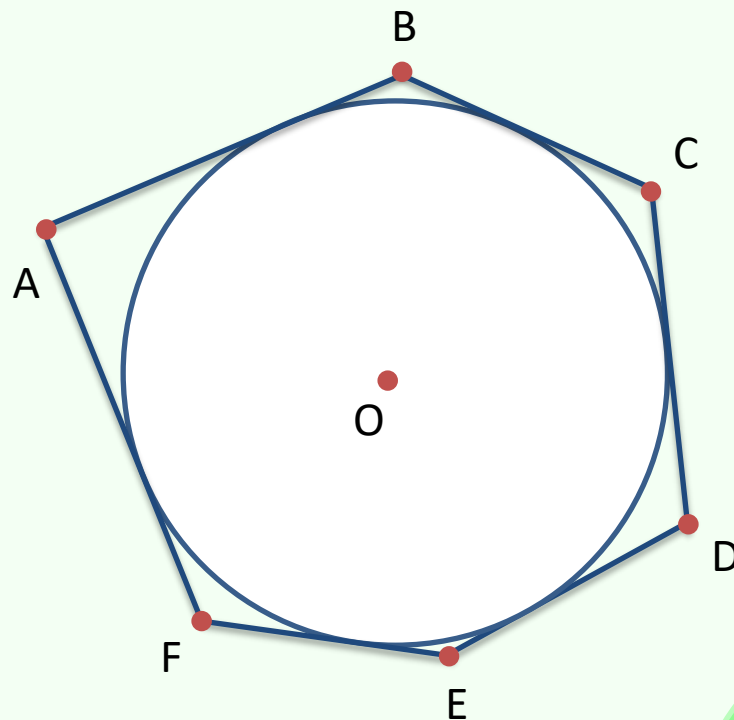
Соединим точки пересечения касательных отрезками. Если все стороны многоугольника касаются некоторой окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник называется описанным около этой окружности



Понятие вписанной окружности

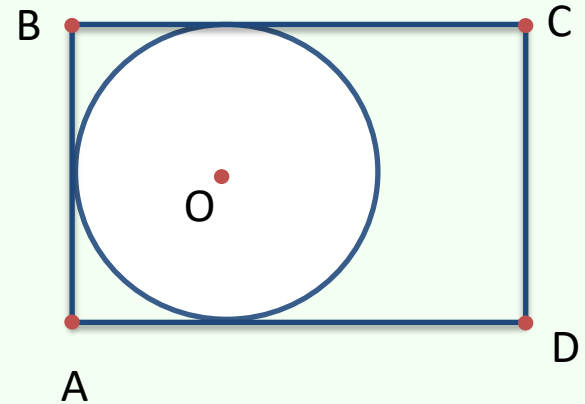
Окружность с центром O
вписана в многоугольник
 $ABCDEF$

Многоугольник $ABCDEF$
описан около
окружности с центром O



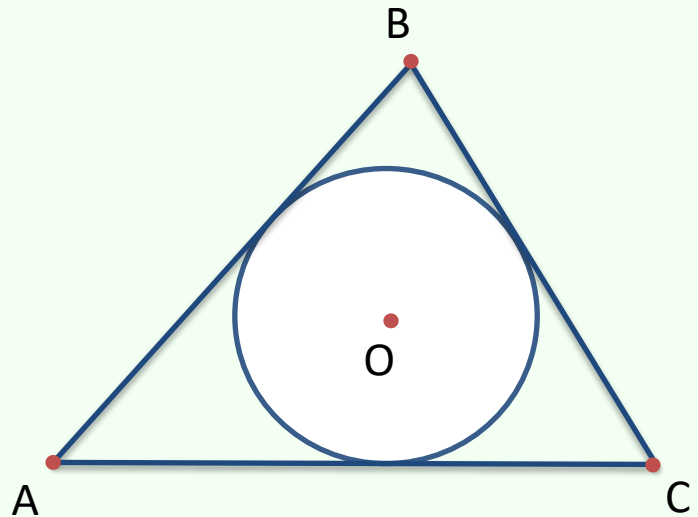
Понятие вписанной окружности

Не во все
многоугольники можно
вписать окружность.
Например, окружность с
центром O не является
вписанной в
четырехугольник $ABCD$,
т.к. BC не касается этой
окружности



Понятие вписанной окружности

Окружность с центром O является вписанной в треугольник ABC , т.к. все стороны треугольника касаются этой окружности



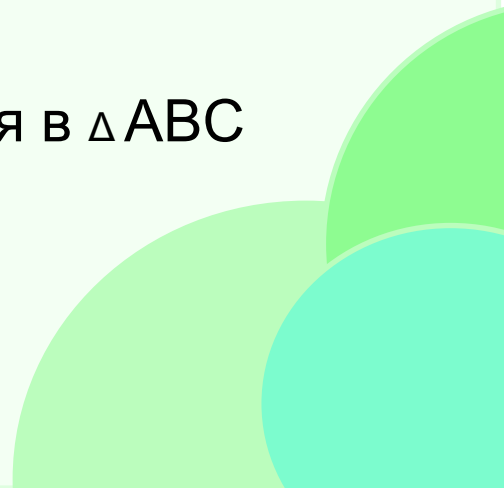
Окружность, вписанная в треугольник

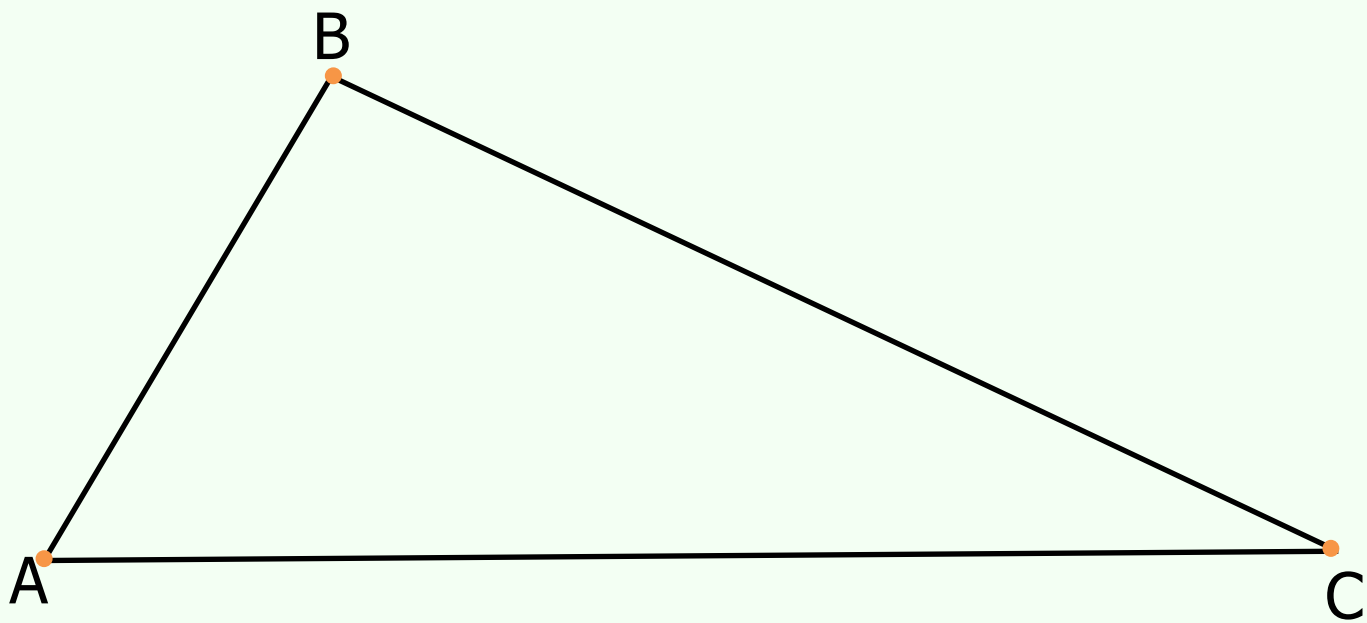
Докажем теорему об окружности вписанной в треугольник:

В любой треугольник можно вписать окружность

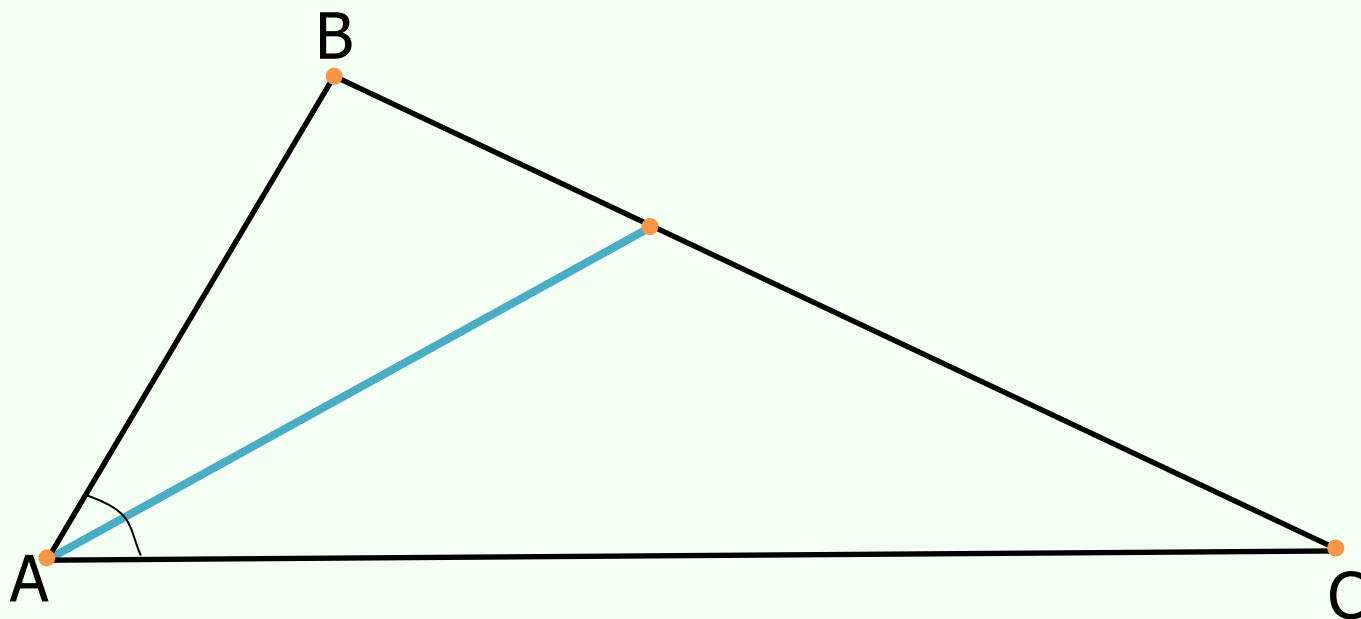
Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует ли окружность, вписанная в $\triangle ABC$

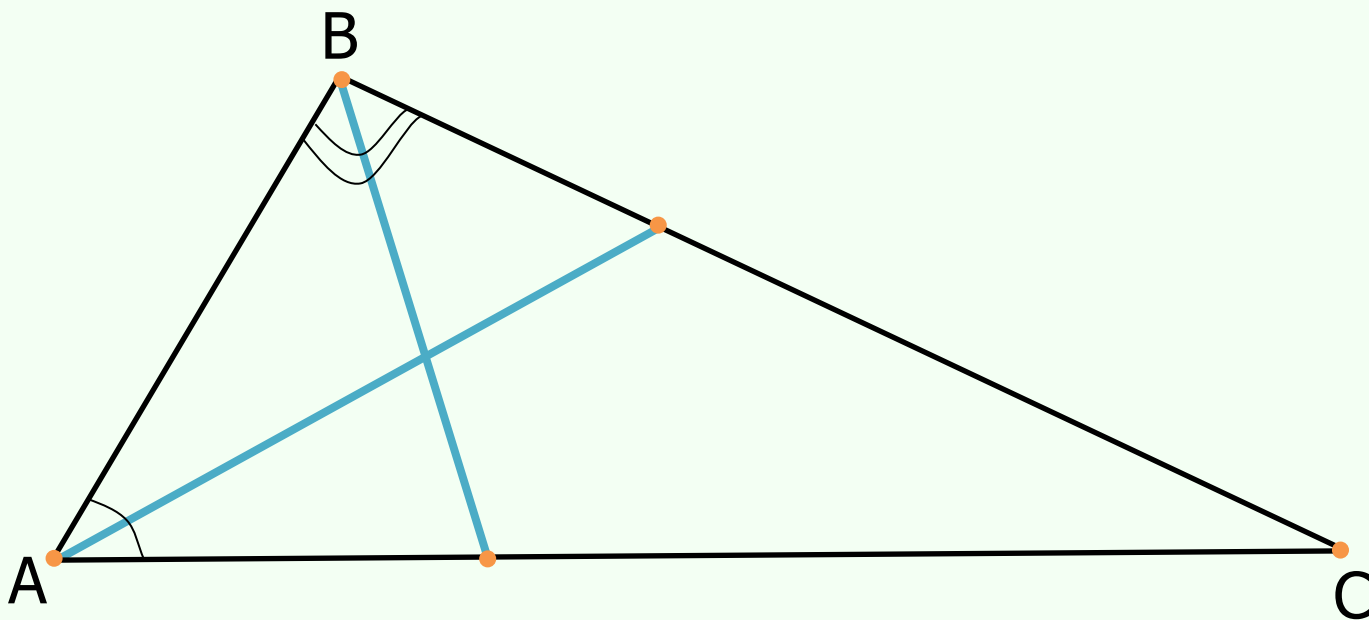




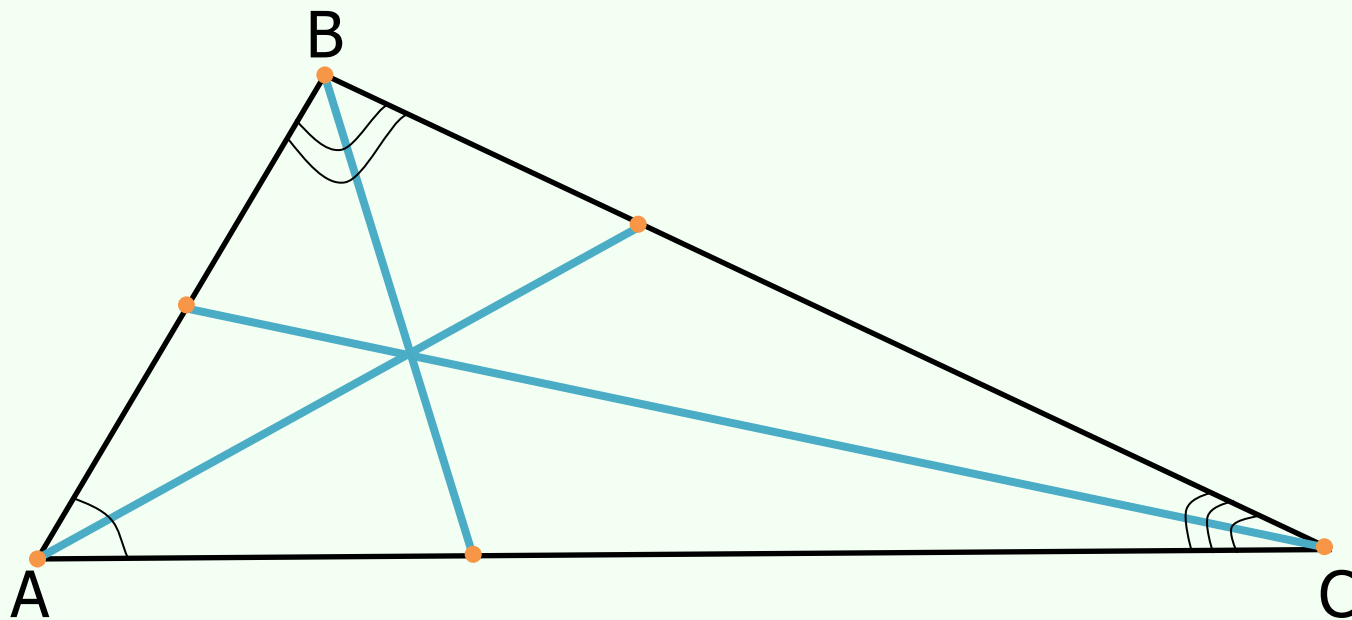
Проведем биссектрису $\angle A$



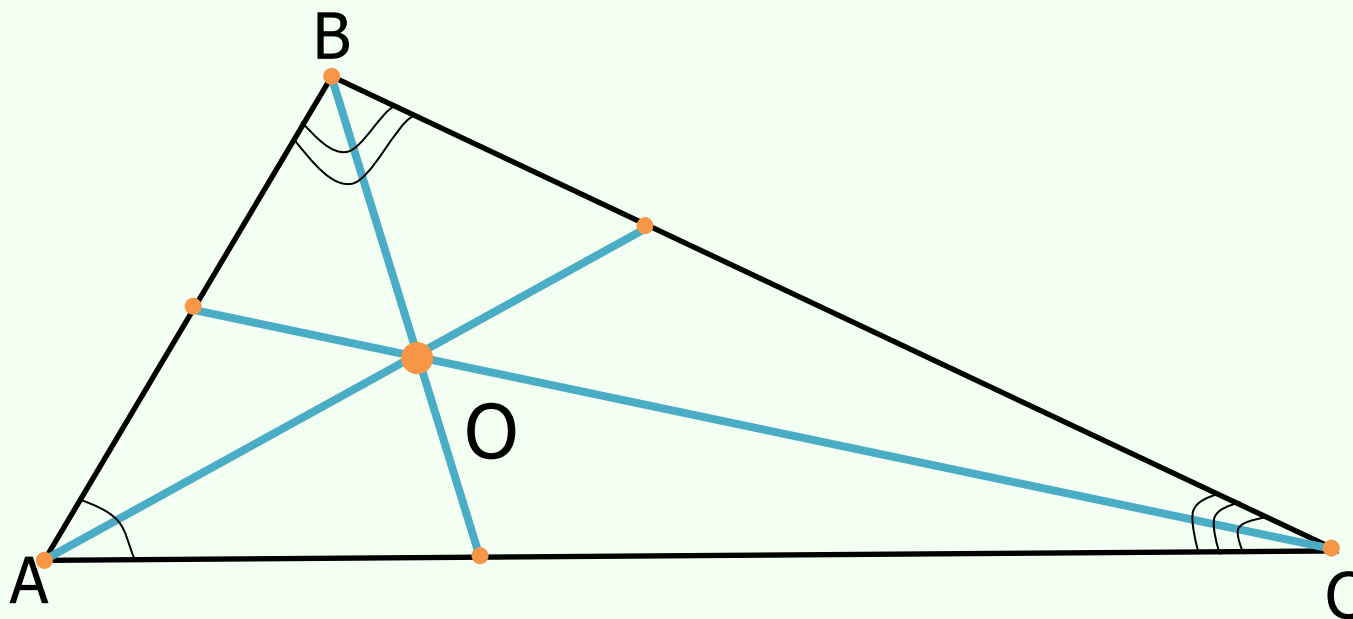
Проведем биссектрису $\angle B$



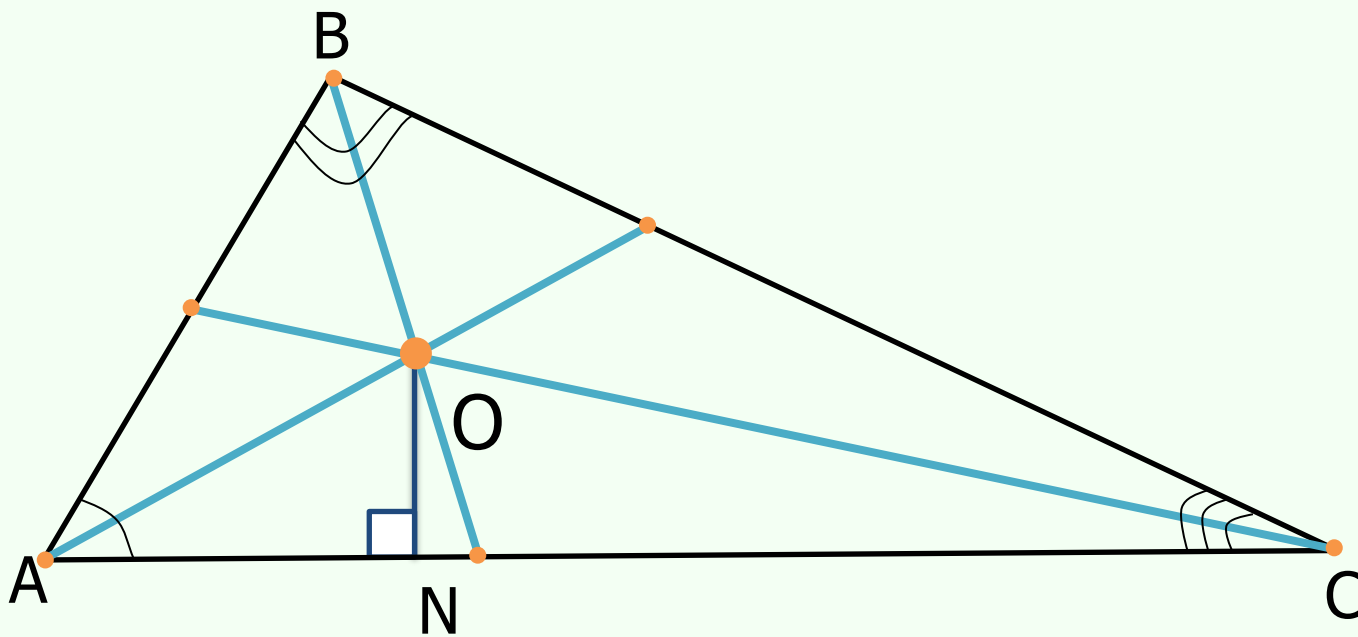
Проведем биссектрису $\angle C$



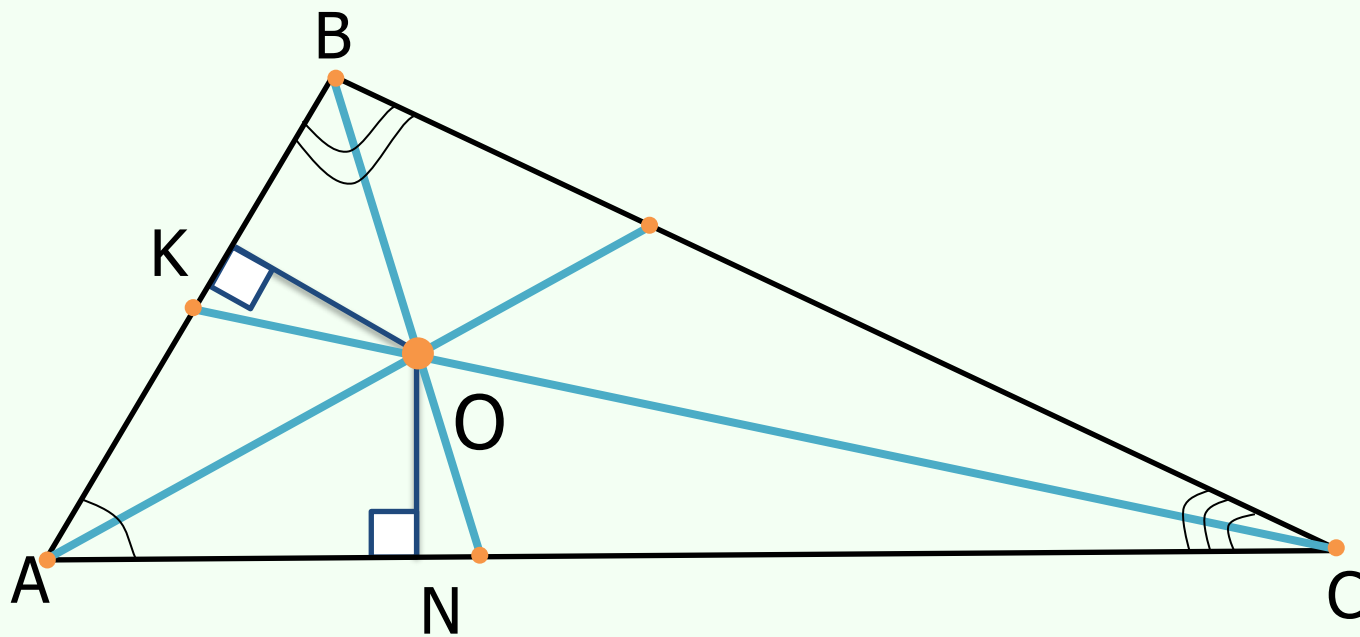
Точка **O** - центр вписанной окружности



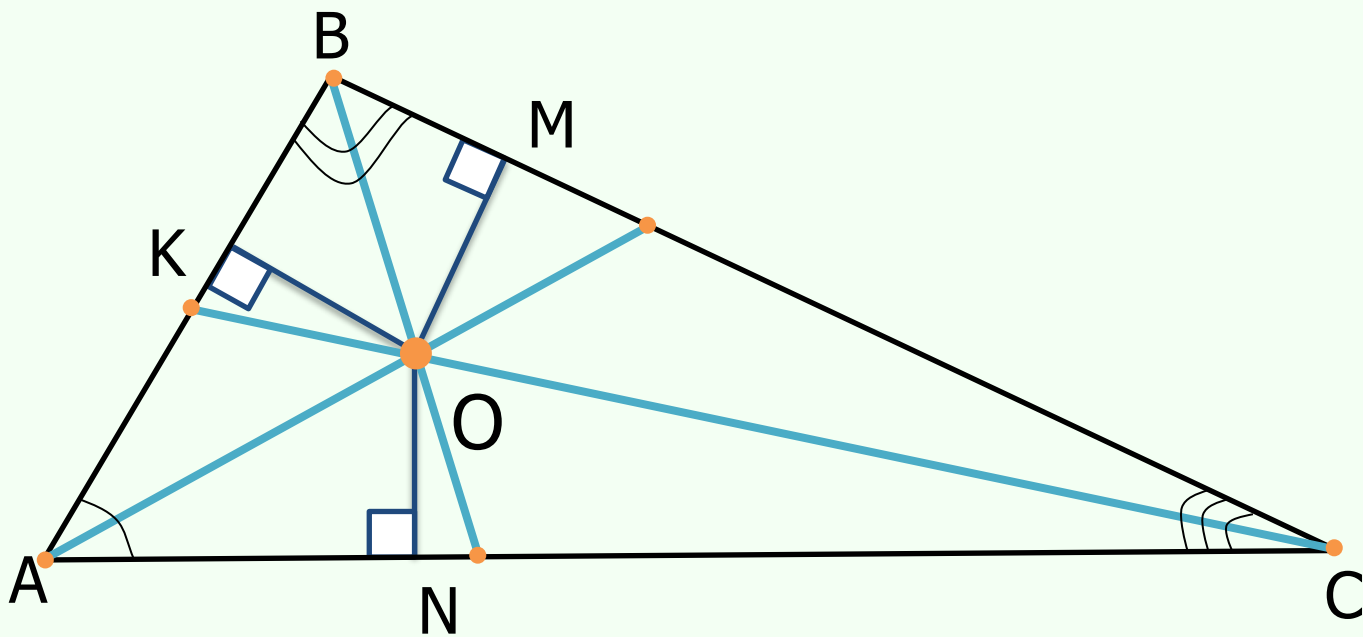
Перпендикуляр из точки **O** к стороне AC



Перпендикуляр из точки **O** к стороне AB



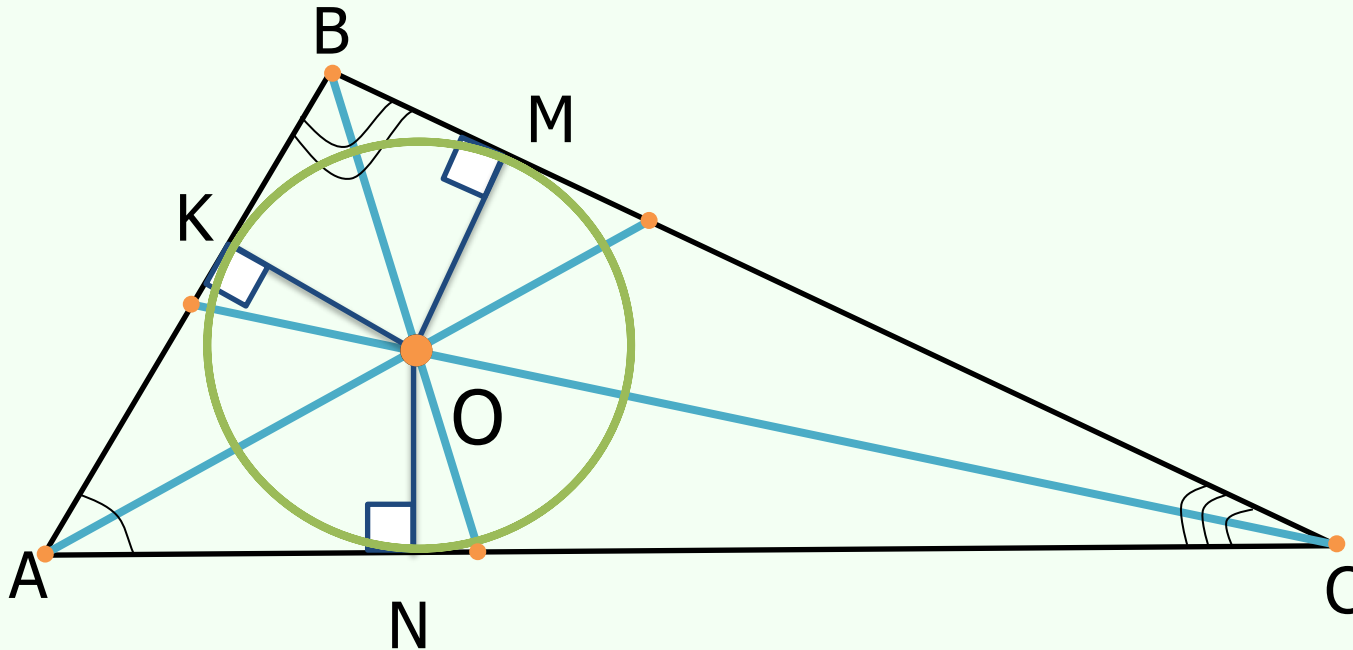
Перпендикуляр из точки **O** к стороне BC



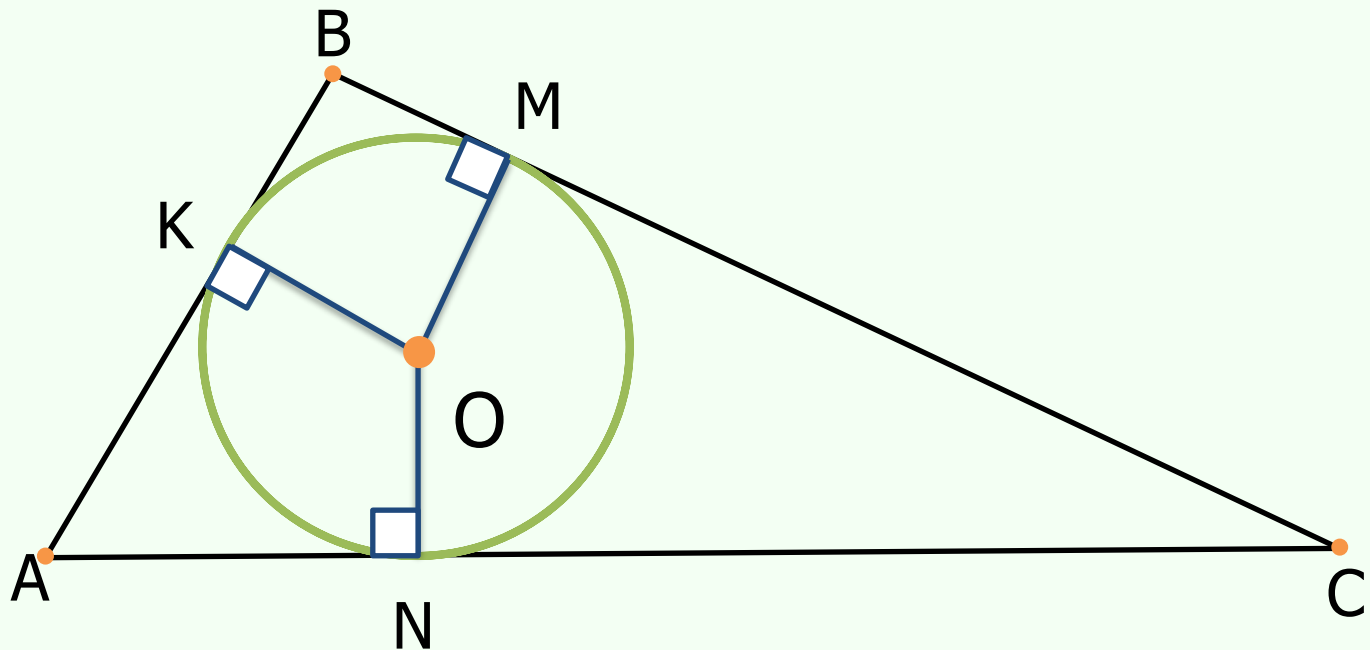
$OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$

Точка O принадлежит биссектрисам углов,
поэтому равноудалена от AB , BC и AC , значит
 $OK = OM = ON$

Проведем окружность с центром в
точке O и радиусом OK , она будет
проходить через точки K , M и N



Стороны $\triangle ABC$ касаются этой окружности, т.к. они перпендикулярны к радиусам OK , OM и ON . Поэтому окружность с центром O и радиусом OK является вписанной в треугольник ABC

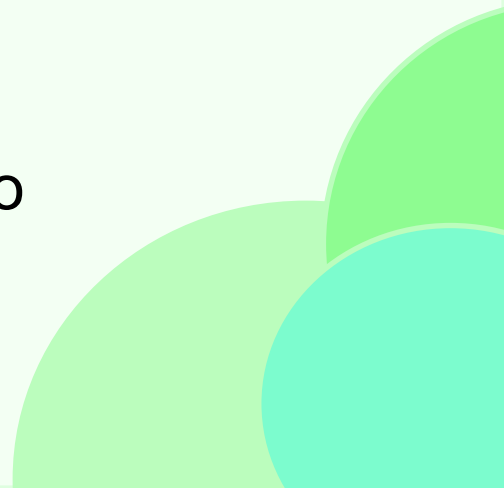


Теорема доказана

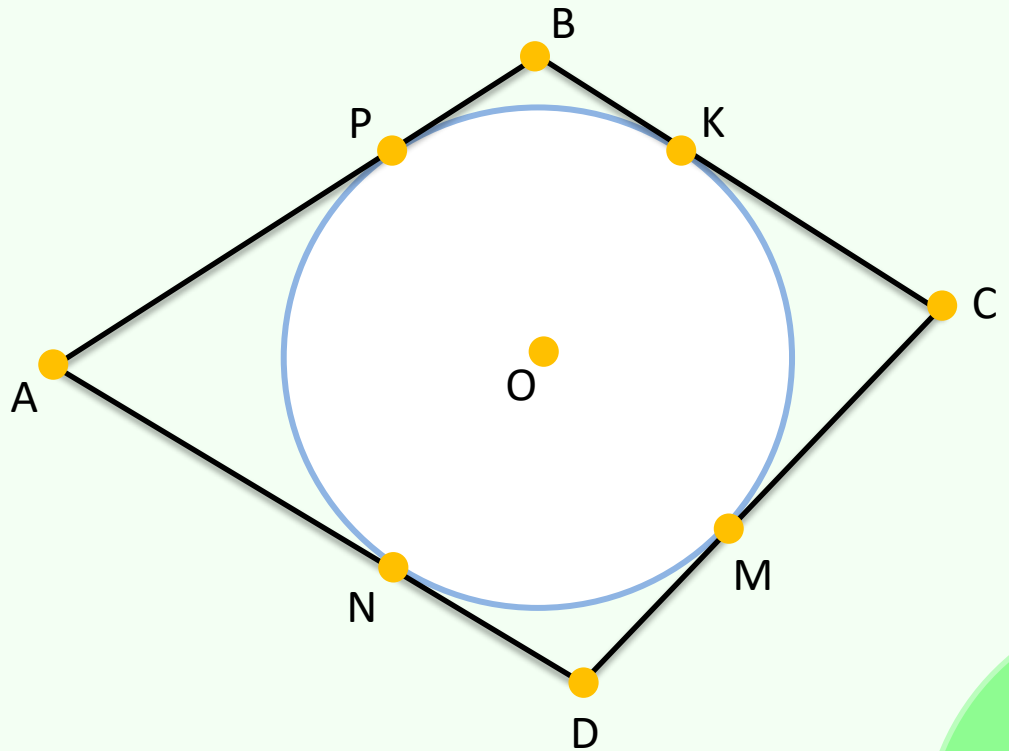
Можно ли в треугольник вписать несколько окружностей?

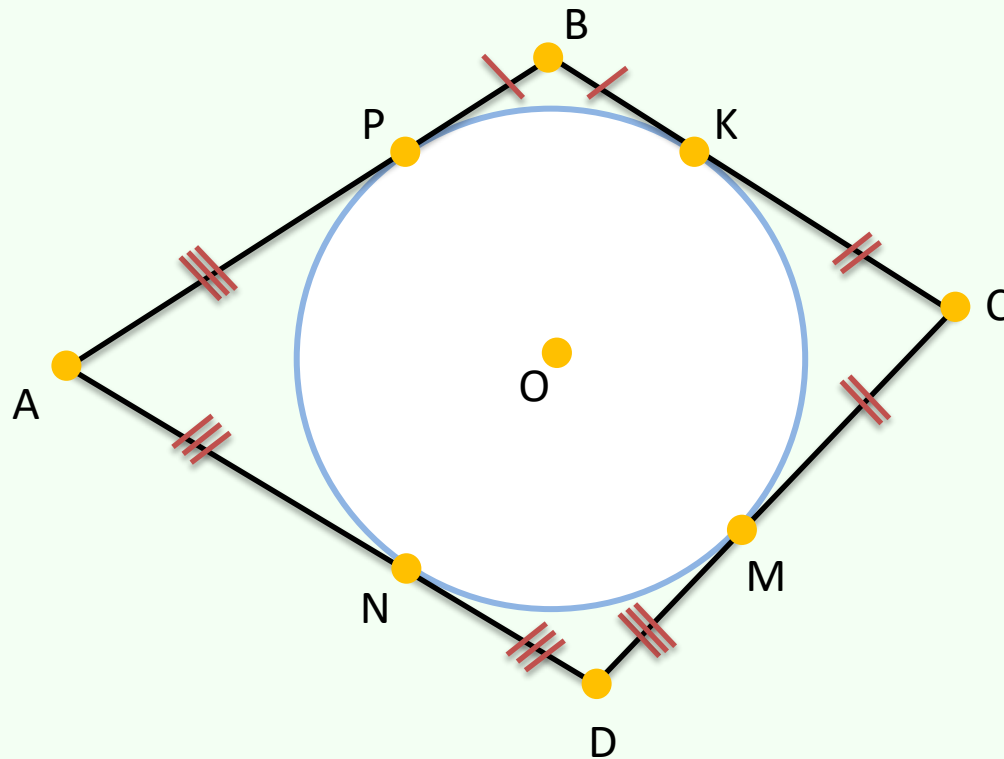
Допустим, мы вписали в треугольник ABC две окружности, тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника, а значит будет совпадать с точкой O - точкой пересечения биссектрис $\triangle ABC$. Радиус такой окружности будет равен расстоянию от центра окружности до сторон треугольника. Следовательно, эти треугольники будут совпадать.

Вывод: в треугольник можно вписать только одну окружность



Ранее мы говорили о четырехугольниках, в которые нельзя вписать окружность. Теперь рассмотрим четырехугольник, в который можно вписать окружность





Вспомним, что отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны. Поэтому $BK = BP$, $CK = CM$, $DN = DM$, $AP = AN$

Составим сумму отрезков АВ и CD, получим:

$$AB + CD = AP + PB + DM + MC$$

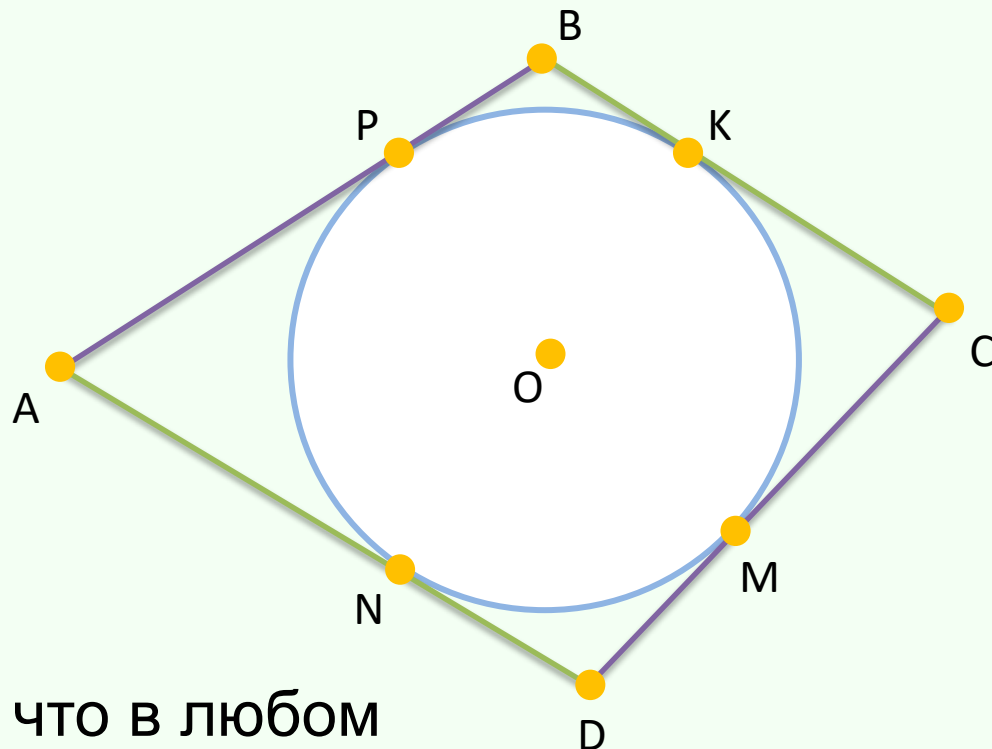
Составим сумму отрезков ВС и AD, получим:

$$BC + AD = BK + KC + AN + ND$$

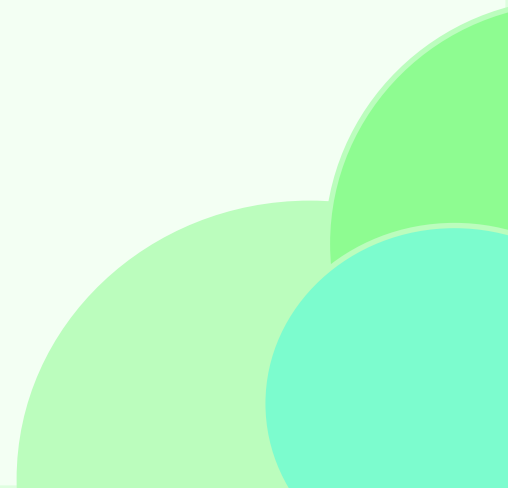
$$AB + CD = BC + AD$$

Из трёх равенств следует, что в любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Верно и обратное утверждение: если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность



**С помощью данной теоремы
можно решать задачи на
ОГЭ и ЕГЭ по математике**



ОГЭ

Тип 25 № 314990  

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 10. Окружность радиуса 9 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение.

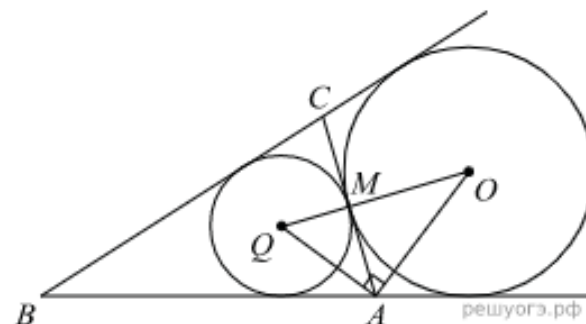
Введём обозначения, приведённые на рисунке. Лучи AO и AQ — соответственно биссектрисы углов CAP и BAC , поскольку эти лучи проходят через центры вписанных окружностей. M — середина основания AC , следовательно, $AM = MC = \frac{10}{2} = 5$. Углы QAM и AOM равны друг другу, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим треугольники QAM и AMO — они прямоугольные и имеют равные углы QAM и AOM , следовательно, эти треугольники подобны:

$$\frac{AO}{AQ} = \frac{AM}{QM} = \frac{OM}{AM}.$$

Отсюда следует, что радиус вписанной окружности:

$$r = QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{5^2}{9} = \frac{25}{9}.$$

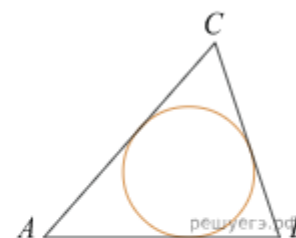
Ответ: $\frac{25}{9}$.



ЕГЭ

1 Тип 1 № [27624](#) 📦 ●

Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



Решение.

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра (p) на радиус вписанной окружности (r):

$$S = pr = 6 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: 6.

Список использованной литературы:

- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. др. Геометрия, 7-9: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 13-е издание, 2022. – 181 с.
- Михайлова Л.П. Презентация к уроку "Вписанная окружность". – Режим доступа:
<https://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2012/04/03/prezentatsiya-k-uroku-vpisannaya-okruzhnost>
- Гущин Д.Д. СДАМ ГИА: Решу ОГЭ – 2023. – Режим доступа:
<https://oge.sdamgia.ru/problem?id=314990>
- Гущин Д.Д. СДАМ ГИА: Решу ЕГЭ – 2023. – Режим доступа:
<https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=27624>