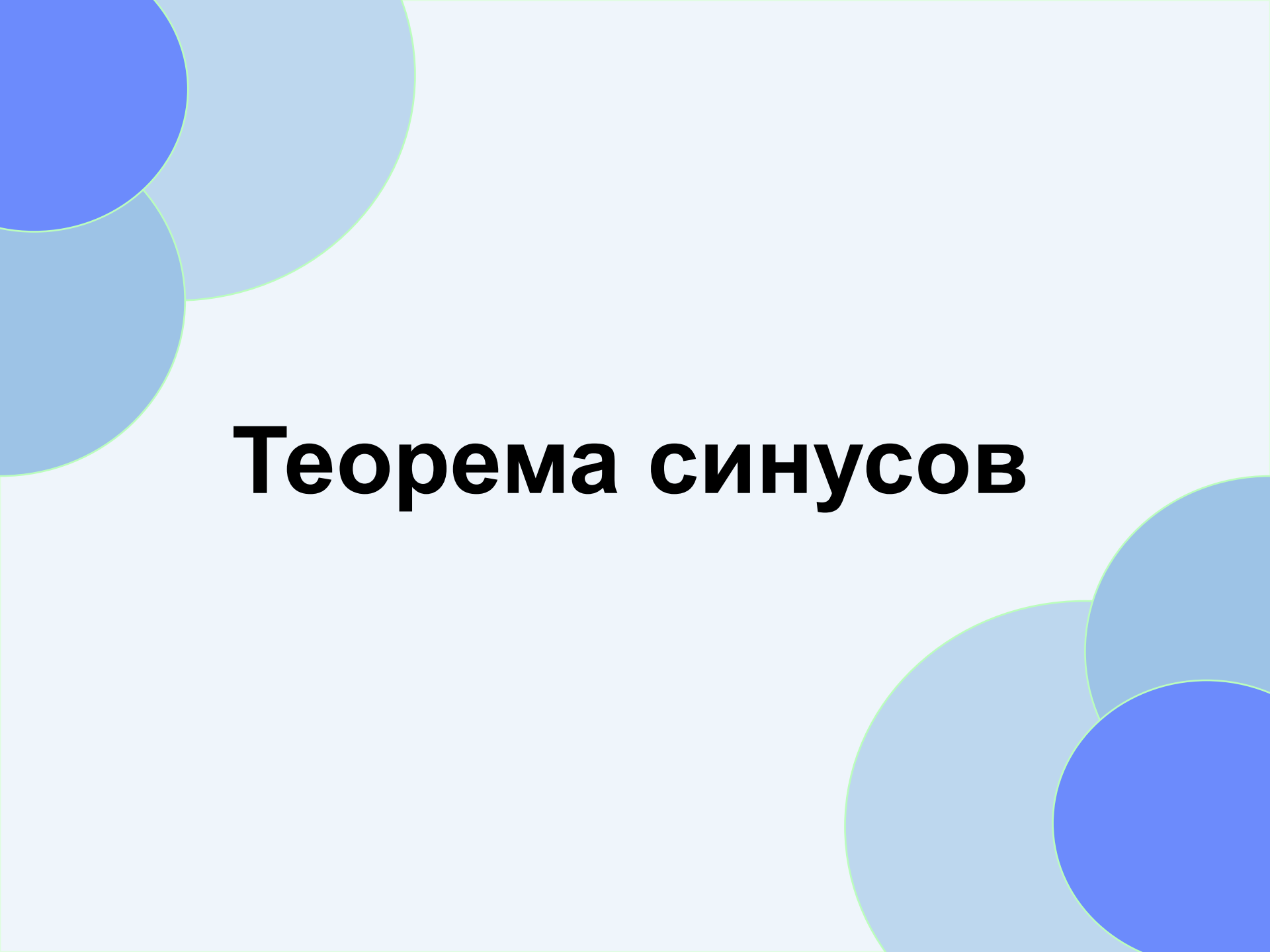


The background features a light blue gradient. In the top-left and bottom-right corners, there are decorative elements consisting of overlapping circles in two shades of blue: a darker blue and a lighter blue. The text is centered in the middle of the slide.

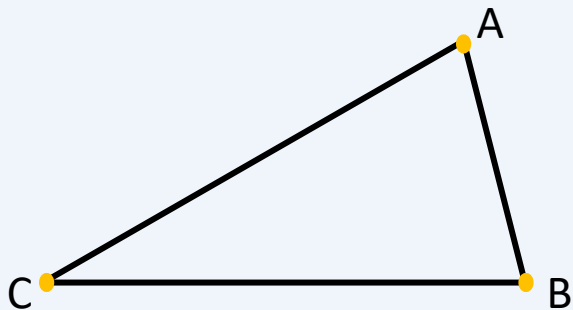
Теорема синусов

Теорема

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

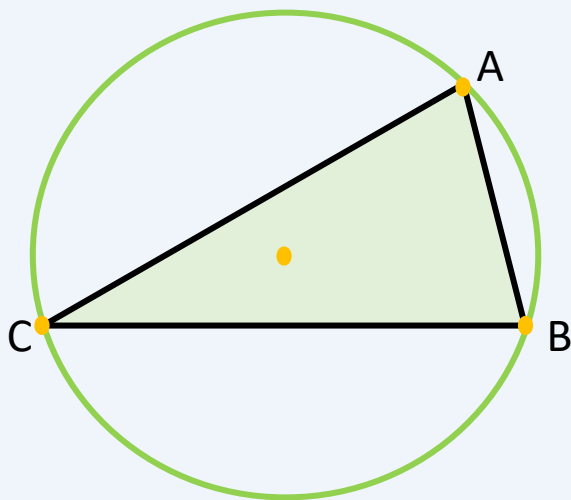
$$\frac{|AB|}{\sin C} = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin A}$$

Доказательство



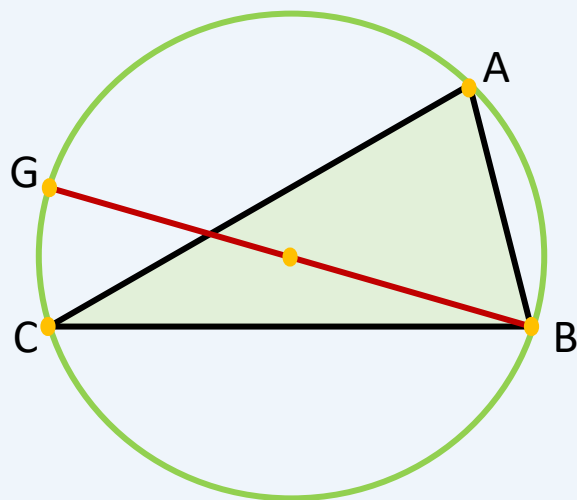
Дан треугольник ABC

Доказательство



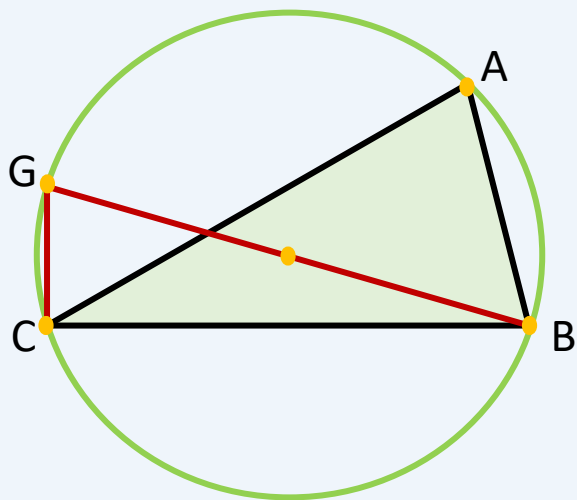
Опишем вокруг
треугольника окружность

Доказательство



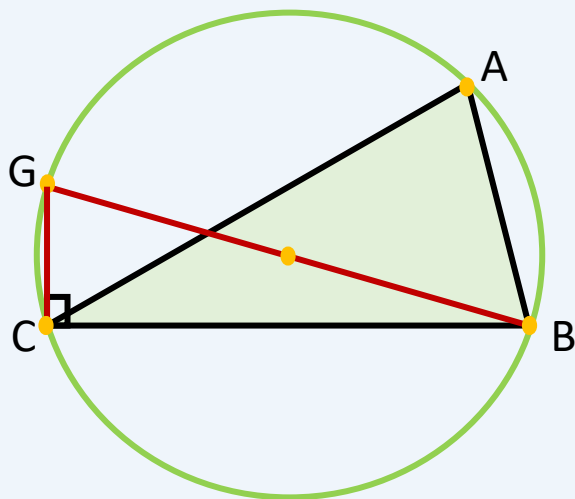
Проведём диаметр BG
для описанной
окружности

Доказательство



Достроим
треугольник GCB

Доказательство



По свойству углов, вписанных в окружность, $\angle GCB$ прямой, а $\angle CGB$ равен либо a , если точки A и G лежат по одну сторону от прямой BC , либо $\pi - a$ в противном случае.

Поскольку $\sin(\pi - a) = \sin a$, в обоих случаях получаем: $a = 2R \sin a$

Повторив то же рассуждение для двух других сторон треугольника, получаем:

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} = 2R$$

**С помощью данной теоремы
можно решать задачи на
ОГЭ и ЕГЭ по математике**



ОГЭ

Тип 25 № 350052

Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 11$ и $CD = 41$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K , причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Решение.

Проведём через точку D прямую, параллельную диагонали AC . Дуги AL и CD равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды: $AL = CD = 41$.

Вертикальные углы AKB и CKD равны. Углы CKD и LDK равны как накрест лежащие: $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$.

Четырёхугольник $ABDL$ вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180° , откуда $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

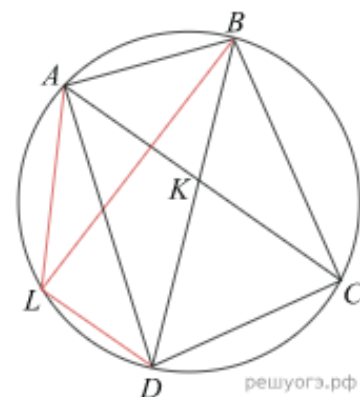
Рассмотрим треугольник ABL . По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} BL &= \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB \cos 120^\circ} = \\ &= \sqrt{41^2 + 11^2 - 2 \cdot 41 \cdot 11 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{2253}. \end{aligned}$$

Найдём радиус описанной вокруг треугольника ABL окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2 \sin \angle BAL} = \frac{\sqrt{2253}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{2253}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2253}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2253}{3}} = \sqrt{751}.$$

Ответ: $\sqrt{751}$.



Тип 16 № 624492

В четырехугольнике $ELKA$ диагонали EK и AL перпендикулярны сторонам AK и EL соответственно. Прямые AK и EL пересекаются в точке M , а угол LMK равен 60° .

а) Докажите, что угол AOE , где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ELKA$, равен 120° .

б) Найдите длину отрезка MO , если $EL = 2022\sqrt{3}$, $AK = 3EL$.

Решение.

а) Рассмотрим треугольник EMA . Из условия задачи следует, что AL и EK — его высоты. Тогда из суммы углов четырехугольника $LMKO$ угол LOK равен $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$. А угол EOA такой же. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что углы MEK и MAL равны 30° . Тогда $MK = \frac{ME}{2}$, $ML = \frac{MA}{2}$. Отсюда треугольники EMA и KML подобны по двум сторонам и углу между ними, причем коэффициент подобия равен 2. Заметим еще, что MO — диаметр окружности, описанной около треугольника KML . Поэтому, из теоремы синусов,

$$MO = \frac{LK}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{\sin 60^\circ} = \frac{EA}{\sqrt{3}}.$$

Осталось найти EA . Заметим, что

$$EO = \frac{EL}{\cos 30^\circ} = 4044,$$

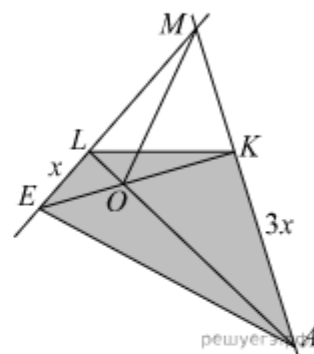
$$OA = \frac{AK}{\cos 30^\circ} = 3EO = 12132.$$

По теореме косинусов получаем:

$$AE^2 = EO^2 + AO^2 + AO \cdot EO = 4044^2(1 + 9 + 3).$$

Значит, $AE = 4044\sqrt{13}$. Из предыдущего получаем что $MO = \frac{AE}{\sqrt{3}} = 4044\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Ответ: б) $4044\sqrt{\frac{13}{3}}$.



Список использованной литературы:

- Погорелов А. В. Геометрия: 7-9 кл. / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2017. – 173 с.
- Федорова Е.А. Презентация на тему:
"Теорема синусов" (9 класс). – Режим доступа:
<https://infourok.ru/prezentaciya-na-temu-teorema-sinusev-klass-2479010.html>
- Гущин Д.Д. СДАМ ГИА: Решу ОГЭ – 2023. – Режим доступа:
<https://math-oge.sdamgia.ru/problem?id=350052>
- Гущин Д.Д. СДАМ ГИА: Решу ЕГЭ – 2023. – Режим доступа:
<https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=624492>